석사학위논문

고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구

A Study on Misconceptions and Errors of Limit in High School 2nd Students

한국교원대학교 대학원

수학교육과 수학교육전공

한 종 희

1997년 2월

목 차

표차례

그림차례

Ⅰ. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

극한의 수학적 개념은 추상적 개념, 즉 높은 수준의 사고가 요구되는 개념이다. 그것은 해석학 전반-근사이론, 연속성 및 미적분학의 기초-에 걸쳐 고루 영향을 주는 중심 위치에 있다. 그러나 최근의 연구는 학생들 중에서 극한 개념을 완전히 이해하는 학생들은 상대적으로 드물다는 것이 확인되었다(Davis & Dinner, 1986 ; Sierpinska, 1987). 고등학교에서 극한에 대한 정의가 Cauchy의 ε, δ에 의한 정의가 아니고, 극한에 도달하는 과정을 중시하는 정의이기 때문에 학생들은 형식적 정의(formal definition)와 다른, 학생 개개인의 극한 개념을 가지는 경우가 있다. 극한 개념은 함수가 극한에 도달할 수 있는가, 극한이 실질적으로 경계인가, 극한이 역동적인 과정인가, 극한이 본질적으로 쉬지 않고 움직이고 있는 개념인가 하는 논의 때문에 학생들은 혼란스러워한다. 이런 학생들은 극한에 대한 형식적 정의를 이해하지 못한 채, 극한을 '이해했다'고 믿는다.

학생들이 형식적 정의를 접하기 이전의 경험은 그들이 그 개념에 대한 심적 표상(mental representation)을 형성하는 방법에 중요한 영향을 끼친다(Tall, 1992). 이러한 현상을 설명하기 위하여 Vinner(1981)는 개념 정의(concept definition)와 개념 이미지(concept image)라는 용어를 사용하였다. 개념 정의란 개념의 형식적 정의를 말한다. 개념 이미지는 개념과 관련된 인간의 마음속에 있는 모든 표상과 성질, 적용을 말한다. 그는 개념 정의와 개념 이미지가 일치하지 않고 모순된 상태로 학습자의 마음에 공존할 수 도 있다고 말하고 이런 현상을 구획화(compartmentalization)현상이라고 불렀다. 이 구획화 현상이 바로 오개념이다. 오개념은 학습자의 개념 형성 과정에서 일어나는 것

으로써 새로운 개념을 형성할 때, 학생들이 이미 가지고 있는 선행지식이 틀리거나, 학습자의 선행 지식이 새로운 지식과 알맞게 연결되지 않을 때 일어난다. 학생들의 오류는 새로운 문제 상황에 학습한 절차를 부정확하게 확장하므로써 발생한다고 하였다(Matz, 1980).

많은 학생들은 극한에 대한 형식적 정의를 완전히 이해하지 못한 채, 그들의 극한 문제를 해결하고, 자신들의 문제 해결과정에서 장애가 발생하여 극한에 대하여 어려움을 느끼고 또한 오개념과 오류가 발생한다. 그러므로 우리는 극한 단원을 중심으로 학생들의 오개념과 오류를 살펴봄으로써 극한에 대한 교사의 교수 전략과 학생들의 수학 학습을 개선하는데 사용할 수 있다. Clayton(1990)은 유능하고 성공적인 교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학적 구조를 알아야 할뿐만 아니라 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략을 알아야 한다고 말하고 있다. 따라서 현장의 수학 교사들은 학생의 오개념과 오류를 연구할 필요가 있으며, 그것은 다음과 같은 긍정적 효과를 가져온다고 말했다 : 첫째, 학생들의 오개념과 오류를 파악하고, 각각의 오개념과 오류에 대하여 학생들에게 정확한 피드백을 제공할 수 있다. 둘째, 오류 유형은 종종 내재하는 수학적 개념의 잘못된 이해, 문제 해결 전략의 부족이나 미성숙한 문제 풀이 전략을 드러나게 한다. 셋째, 오류에서 발견된 학생들의 사고 과정의 결함 발견은 교수 방법을 개선하는데 도움을 줄 수 있다.

지금까지 미적분에 관한 많은 연구가 있었다(Confrey, 1980 ; Dreyfus & Eisenberg, 1983 ; Orton, 1987 ; Steen, 1987 ; White, 1990). 이 연구들에 의하면, 학생들이 기본적인 미적분 개념을 잘 이해하지 못하고 있다는 것을 보여주었다. 본 연구는 미적분 학의 기초가 되는 극한에 대한 고등 학생들의 오개념과 극한 풀이 과정에서 나타나는 오류를 분석, 제시하여 극한에 대한 교수 전략과 학생들의 수학 학습에 도움을 주고자 한다.

B. 연구 문제

본 연구를 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1. 수열의 극한, 함수의 극한, 연속 함수의 정의에 대하여 학생들이 어떠한 오개념을 가지고 있는가?

2. 극한에 관한 문제 풀이과정에서 학생들이 어떠한 오류 유형을 나타내는가?

C. 용어의 정의

1. 오개념(Misconception)

오개념이란 학생들이 수학에서 사용하고 있는 개념과 그 의미를 다르게 이해하거나 잘못 사용하는 개념이다.

본 연구에서는 수열의 극한, 함수의 극한, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 연속에 대해 교과서에 제시된 정의와 다르게 이해하고 있는 개념을 오개념이라 한다.

2. 오류(Error)

오류의 의미를 국어 사전에서 찾아보면, '행동이나 사고가 그릇되어 이치에 어긋나는 일', '바르지 못한 논리적 과정 및 그 결과로 생긴 추리나 판단'으로 기술하고 있다.

본 연구에서의 오류는 극한에 관한 풀이 과정에서 나타나는 수학적인 오류로써 다음의 네 가지 모형을 말한다 :

첫째, 기술 오류 : 이 모형의 오류는 문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류를 말한다.

둘째, 논리적으로 부당한 추론 : 이 모형의 오류는 문제를 푸는 과정에서 현

단계에서 다음 단계로 넘어가는 과정에서 논리적으로 적당치 못한 추론, 즉 주어진 정보로부터 잘못 유도된 새로운 정보에 관한 오류를 말한다.

셋째, 잘못 사용된 정의 및 정리 : 이 모형의 오류는 특별한 원리, 정의와 정리에 대한 왜곡을 다루는 오류를 말한다.

넷째, 애매한 오류 : 이 모형의 오류는 학생들에 의해서 수행된 과정은 옳지만, 문제에 대한 해가 아닐 경우와 해석 불가능한 해를 포함한다.

D. 연구의 제한점

본 연구에서 제시된 연구 자료들은 대전 광역 시에 있는 여섯 개의 여자 고등학교에서 연구자가 임의로 일 개교를 선정한 후 2학년 12학급 중에서 2개 반을 임의로 선정하였으므로 특성이 다른 집단에 대해서는 연구 결과가 다르게 나타날 수도 있고, 오류 모형에 관한 분류에서 연구자에 따라서 오류 모형이 달라질 수도 있다. 그러므로 연구 결과를 일반화할 때는 주의를 요한다.

E. 기대되는 효과

본 연구를 통해서 다음과 같은 효과를 예상할 수 있다.

첫째, 극한의 개념에 대하여 학생들의 오개념을 살펴봄으로 해서 극한 개념의 지도에 도움을 줄 수 있다.

둘째, 극한 문제를 해결하는 과정에서 오류의 형태를 분석하여 각각의 오류의 예방 및 지도에 도움을 줄 수 있다.

셋째, 극한 개념을 이해하고 문제 해결력을 키움으로써 후속학습에 도움이 되고 수학에 대한 흥미 및 관심을 높이는데 도움을 줄 수 있다.

Ⅱ. 문헌의 연구

본 연구와 관련되는 문헌은 크게 두 개의 단원 즉, 극한과 오류로 나누어 검토하였다.

첫째 단원에서는 극한 개념의 역사적 발달에서의 인식론적 장애, 현대 수학의 인식론적 장애, 인식론적 장애의 교수학적 전달에 대하여 알아보았다.

둘째 단원에서는 수학 교육에서의 오류 분석, 문제 해결에서의 오류 모형, 고등학교 수학에서 오류를 위한 경험적 분류 모형에 대하여 살펴보았다.

A.극 한

극한의 수학적 개념은 특히 어려운 개념, 고등 수학에서 요구하는 전형적인 사고이다. 그것은 해석학 전반에 걸쳐 근사 이론, 연속과 미적분학의 기초로서 중요한 위치를 차지한다. 그러나 최근의 연구는 학생들 중에서 극한 개념을 완전히 이해하는 학생은 상대적으로 드물다는 것을 확인하였다(Davis & Vinner, 1986 ; Sierpinska, 1987). 또한 미적분 과정을 이수한 대부분의 학생들은 극한에 대해 정확치 못한 이해를 하고, 정확한 정의를 이해하는 학생은 드물다(Ervynck, 1981).

극한 개념을 교수, 학습하는데 가장 어려움 중의 하나는 극한의 풍부성과 복잡성뿐만 아니라, 인지적 측면이 수학적 정의로부터 순수하게 생성될 수 없는 상황에 있다. 정의와 개념 사이의 구별은 교수학적으로 대단히 중요하다. 극한의 정의를 기억하는 것과 기본적인 개념을 얻는 것은 별개의 것이다. 극한의 역동적 개념을 통해서 처음 접하는 근사의 아이디어와 극한 개념이, 정의가 아닌 직관적 개념의 다양한 특성에 의존하는 실제 문제를 풀기 위해 작용하는 방법이다. 그러한 견해로부터 출발할 때, 학생들은 종종 정의의 형식

을 전혀 이해하지 못하고, 극한의 정의를 '이해했다'고 믿는다. 학생들은 종종 정의의 형식을 전혀 이해하지 못하고, 풀도록 요구받은 많은 문제를 해결할 수 있다. 이러한 가운데 극한 개념의 정의로부터 접하게 되는 의미와 미묘하게 다른 일상 언어에서의 자신들의 의미를 찾는다. 그러한 출발점으로부터 심각한 어려움의 원인이 되는 개인적 장애가 일어난다.

극한에 대한 교수 전에, 학생들은 사용되는 언어들의 구어적인 의미로서, 이미 일상적인 경험으로부터 많은 아이디어, 직관, 이미지와 지식을 갖고 있다. 우리는 형식적 교수 전에 일어나는 아이디어의 이러한 개념을 자발적인 개념으로써 설명한다(Cornu, 1981, 1983). 학생들이 수학 수업에 참여할 때, 이러한 개념들은 사라지지 않는다. 이러한 자발적 아이디어는 새로 습득된 지식과 섞이어, 학생들이 개인적인 개념들을 형성하도록 수정되고 적용되어진다.

극한 개념의 형식적 정의와 직관적 표상 사이에 일치하지 않는 결과로써, 다양한 오개념이 존재한다. Shlomo Vinner(1991)는 명문 고등학교의 15명의 우등생에게 극한의 개념을 정의하도록 요구했다(극한을 학습한 후에). 단지 한 명의 학생만이, 좀 불완전하지만 수용할 수 있는 공식을 답했다. 나머지 14명의 학생들은 전형적인 오개념을 나타냈다. Shlomo Vinner는 다음과 같은 오개념을 언급했다 :

1. 수열은 '극한에 도달하지 않아야 한다'(따라서 수열 1, 1, 1,…는 수렴하지 않는다).
2. 수열은 단조 증가하거나 단조 감소해야만 한다. 따라서 일반항 $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 인 수열은 수렴하지 않는다.
3. 극한은 수열의 '마지막' 항이다. 우리는 '무한히 많은 항을 확인한 후에' 극한에 도달할 수 있다(Vinner, 1991).

Cornu(1991)가 보여준 것처럼, '가까워진다'는 용어는 학생들 마음속에 다양한 근본적인 의미를 가지고 있어, 이것들이 형식적 개념과 상호 작용한다 :

가까워진다(실제적으로 극한으로부터 떨어져서)
가까워진다(극한에 도달하지 못하고)

가까워진다(단지 극한에 도달할 때까지) (p.154).

학생들이 극한 개념에 관계해서 '가까워진다'는 용어에 주는 해석은 자신의 직관적 모형에 의존한다. 수열 1, 1, 1, …이 수렴한다는 것을 받아들일 수 없는 학생은 직관적으로 다음의 것을 의미한다고 생각한다 :

' 에 가까워진다'는 : (a)수열의 연속적인 항과 극한 사이에 간격 이 점점 작아져야 한다. (b)극한은 도달할 수 없다(p.154).

또 다른 예로써 학생들은 원의 넓이가 다각형 수열의 극한이라는 생각은 직관적으로 인식하지 못한다 : 그것은 모순된 것이다. 원과 같은 다각형은 결코 존재할 수가 없다. 직관적으로, 다각형은 많은 변을 가지고 있다. 동시에 원이면서 다각형인 '어떤 것'은 직관적인 수준에서 의미를 갖지 못한다. 모순은 순수하고 형식적인 수준에서 제거되어질 수 있다. 그러나 순수하고 형식적인 수준은 심리적으로 불가능하다. 사실, 수학에서는 그러한 경향이 있지만 심리적으로 그것에 도달할 수 없다.

결과적으로, 우리는 극한과 연속 개념에 관하여 학생들의 인식론적 장애를 얻는다. 같은 유형의 장애가 수학 역사에서 확인되어질 수 있다. 어떤 수학자(Robins(1679 1751))는 극한은 얻을 수 없다고 주장했다. 다른 수학자(Jurim(1685 1750))는 두 양 사이의 '최후의 비는 양이 소멸하는 순간에 도달하는 비'라고 말했다.

이러한 모순적 태도는 직관적으로 끝이 없는 것으로 보여지는 과정을 개념화하려는 노력의 표현으로 '무한소'의 개념을 유래시킨다.

다음 예를 들어보자. 해의 직관 정도를 측정하려는 연구에서 (Fischbein, Tirosh & Melamend, 1981), 다음과 같은 문제를 제시했다 :

선분 AB = 1m로 주어졌다. 또 다른 선분 BC= 1/2m가 더해진다고 가정하자. 1/4m, 1/8m인 선분을 더하는 것을 계속한다고 하자. 선분 AB + BC + CD + …의 합은 얼마인가?

각 반응에 대한 학생들의 비율은 다음과 같다 :

1. 합은 2 이다 (5.6%) (정답)

2. 합은 무한이다 (51.4%)

3. 합은 2 보다 적다 즉 '합은 2 에 접근한다' (16.8%).

위에서 제시된 것처럼, 대단히 적은 학생들이 정답을 택했다. 이것의 해석은 실무한은 직관적이지 못하다는 것이다. 수열 $1 + 1/2 + 1/4 + \cdots = 2$를 받아들이기 위해서, 학생들은 수열의 실무한을 직관적으로 인식해야만 한다. 이러한 인식이 없는 학생들은 쉽게 정답(S = 2)을 택하지 못하고, 수열의 무한을 잠재적 무한(합은 2 로 접근한다. 즉 합은 2보다 적다)으로 생각한다.

학생들에게 $1/3$의 소수 표현을 질문하면, 그들은 기꺼이 $1/3 = 0.333\cdots$이라고 쓴다. 반면에 그들은 $0.333\cdots = 1/3$이라는 것을 받아들이지 않는다. 위의 예에서처럼, 그들은 $0.333\cdots$은 $1/3$에 접근한다고 주장한다. 우리는 여기서 같은 유형의 직관적 장애에 접하게 된다. 덧붙여, 우리는 다음과 같은 측면을 강조해야만 한다 : 만일 학생들이 $1/3 = 0.333\cdots$를 받아들인다면, 그들은 $0.333\cdots = 1/3$이라는 것도 받아들여야 한다.

Aline Robert(1982a, b)는 학생들이 수열의 극한 개념을 기억하는 여러 모형을 연구했다. 학생들이 수열의 형식적 정의가 제시되었음에도 불구하고, 수열의 개념을 설명하도록 요구받았을 때, 대부분이 다양한 측면의 이전 경험과 관계된 개념을 불러내는 경향이 있었다. 어떤 학생들은 다음과 같이 자발적인 개념으로 생각되는 초보적이고 기본적인 모형을 제시했다 :

· 마지막 항은 항상 같은 값을 갖는다.

· 값은 ℓ 을 지날 수 없다.

덧붙여 형식적 정의로부터 더 많이 발생하는 모형은 다음과 같다 :

· 수렴하는 수열은 상계의 증가 수열이다 (혹은 하계의 감소 수열이다).

· 수렴하는 수열은 극한에 접근하는 증가(혹은 감소)하는 수열이다.

· a_n은 ℓ 에 접근한다.

· a_n과 ℓ 의 거리는 작아진다.

· 값들은 한 수에 점점 더 접근한다.

· a_n은 ℓ 근처의 구간에 있다.

· a_n은 ℓ 주위에 모여있다.

· 수열의 항들은 ℓ의 근방에서 발견되어짐에 의해서 끝난다.

그녀는 이 모형들이 대학에 있는 학생들이 문제를 푸는 방법에 영향을 준다는 것을 발견했다. 최초의 교수가 극한의 개념 그 자체보다는 극한에 접근하는 과정을 강조하는 경향이 있다. 위에 예시된 것처럼 이런 과정과 결합된 상상의 개념은 형식적 정의와 모순되는 많은 요소를 포함한다('접근하지만 도달할 수 없다', '지날 수 없다', '가까워진다' 등등). 그러므로 학생들은 '점점 가까워진다' 혹은 '커진다' 혹은 '영원히 계속된다'와 같은 과정에 관계된 오개념에 대하여 극한과 무한의 이미지를 발달시킨다.

학생들의 극한과 무한의 개념에 관한 오개념의 민족지학적인 연구에서, Sierpinska(1987)은 31명의 16세 pre-calculus와 물리과 학생들의 개념 이미지를 분석했다. 그녀는 그것들을 그녀가 각 그룹을 위하여 고안한 이름을 붙여 그룹들을 분류했다 :

미첼(Michael)과 크리스토퍼(Christopher)는 무의식적인 무한 주의자이다(적어도 처음에) : 그들은 '무한'을 말하자면 '대단히 크다'고 생각한다- 그들을 위해서 극한은 항의 마지막 값이어야 한다. 미첼에게 있어서 이 마지막 값은 $+\infty$혹은 $-\infty$이다. 그것은 항의 값들의 역동적 변화에 더 예민한 크리스토퍼에게는 그렇지 않다. 마지막 값은 항상 무한대로 접근하지 않는다. 그것은 작고 알려진 수로 접근 할 수도 있다.

조지(George)는 의식적인 무한주의자이다 : 무한은 정확한 정의를 인지하기 어려운 초물리적인 것이다. 만일 수학이 정확한 과학이 되려면 우리는 무한에 관하여 말하는 것을 삼가고 유한 수만을 말해야한다. 수열의 성질을 설명할 때, 가장 중요한 것은 n번째 항을 일반적인 공식으로 특징 지우는 것이다. 주어진 n에 대하여 우리는 항의 정확한 값을 계산할 수 있거나 이 값의 근사값을 줄 수 있어야한다.

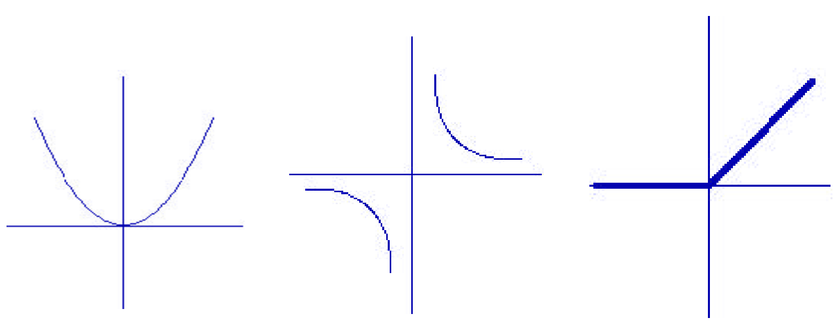
파울(Paul)과 로버트(Robert)는 동적인 무한주의자이다 : 그들에게 무한의 아이디어는 시간의 아이디어와 연결된다. 파울은 잠재주의자이다. 집합 혹은 수열의 전체를 생각하기 위해서, 우리는 그것의 모든 요소를 통해서 사고를 삽입시켜야 한다.무한 집합이나 수열의 가설은 결코 완성되어질 수 없다. 무한은 잠재적으로만 존재한다. 로버트는 잠재적 현실주의자이다 : 사고에서 '무한으로의 도약'은 가능하다 : 무한은 잠재적으로 결국 실현되어질 수 있다. 파울과 로버트에게는 만일 어떤 고정된 값으로 접근하는 경향이 있다면, 중요한 것은 수열의 항들이 어떻게 변화하는지를 보는 것이다. 파울은 수열의

> 항들이 어떤 주어진 값보다 더 적게 다르기 위해서 점점 작아진다면, 그것들은 극한에 도달할 수 없다. 로버트는 항들이 무한에 있는 극한에 도달 할 것이라고 이론적으로 생각한다.

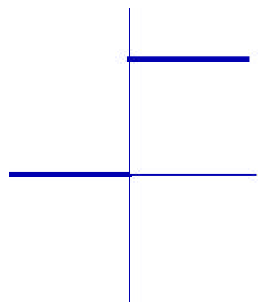
이러한 방법에서, 그녀는 선사 시대 이후로 우리들에게 있었고, 오늘날 우리 학생들에게 계속되는 극한과 무한에 관하여 끝없는 논쟁을 보여줬다. 표면상 대단히 다를지라도, 연속, 미분, 적분 등에 대한 극한 과정은 인지적 용어에서 비슷한 어려움을 보여준다. 예로써, 연속은 ‘하루 종일 연속해서 비가 온다(폭우가 중단이 없다는 의미에서)’, 혹은 ‘철길은 연속해서 밀착되었다(철도에 간격이 없다는 의미에서)’같은 일상적인 언어의 사용에서 불러일으키는 자발적 개념을 가지므로써 어려움을 겪는다. 이 견해는 종종 ‘한 조각으로 된’ 혹은 ‘연필을 종이에서 떼지 않고 그려진’그래프를 설명하므로써, 연속의 개념을 단순하게 통찰시키려는 교사들의 시도에 의해서 강화되어지고, 그렇기 때문에 연속과 연결성에 대하여 수학적 개념을 혼동하게 된다.

대학교 1학년 수학과 학생들에게 실시된 설문지(Tall & Vinner, 1981)는 연속에 대한 학생들의 개념 이미지를 조사하기 위해서 <그림1>과 같은 문제를 제시하였다.

다음 중에서 연속 함수인 것은?



$f_1(x) = x^2$ $\qquad$ $f_2(x) = 1/x\,(x \neq 0)$ $\qquad$ $f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$



$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$ $f_5(x) = \begin{cases} 0 & (\text{유리수}) \\ 1 & (\text{무리수}) \end{cases}$

<그림 1> 연속의 개념 이미지

<표 Ⅱ-1> 연속에 대한 반응표

인원(N=41)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
연속	41	6	27	1	8
불연속	0	35	12	38	26
무응답	0	0	2	2	7

<표Ⅱ-1>은 연속의 개념 이미지에 대한 학생들의 반응표이다. 수학적으로 f_1, f_2와 f_3는 연속인 반면에 f_4와 f_5는 연속이 아니다. 그러나 학생들의 개념 이미지는 다르게 나타났다.

f_1에 대한 모든 대답은 옳았지만, 'f_1이 단지 하나의 공식에 의해서 제시되었기 때문에' 연속이다라는 생각처럼, 많은 학생들이 틀린 이유로써, 옳은 답을 택한 경우가 있었다. 함수 f_2는 학생들 사이에 논쟁이 일어났다. 그것은 정의역 $\{x \in R \mid x \neq 0\}$에서 ε-δ 정의에 의해서 연속이다. 그러나 학생들의 개념 이미지는 다음과 같이 나타났다 : f_2는 '함수가 하나의 공식에 의해서 주

어졌기 때문에' 연속이다. '그래프가 한 조각이 아니다', '함수는 원점에서 정의되지 않았다', '함수는 원점에서 무한대이다'라는 이유로 연속이 아니다. 우리는 함수의 초기 단계에서 형식적 정의와는 다른 학생들의 자발적 개념을 볼 수 있다.

1. 역사적 발달에서 인식론적 장애

Guy Brousseau(1986)는 인식론적 장애를 활동의 어떤 분야에서 잘 기능 하여 확고 부동하게 되지만 그것이 잘 기능하지 못해서 모순이 일어나는 새로운 상황에서 만족스럽게 작용하는데 실패하는 지식으로 정의했다. 그렇기 때문에 초기의 불충분하고 잘못 형성된 지식을 파괴하고, 그것을 새로운 영역에서 만족스럽게 작용하는 새로운 개념으로 대체하는 것이 필요하게 된다. 그러한 장애의 거부와 정화는 지식 그 자체의 본질적 부분이다 : 지식이 분명하게 실패되어질 것 같은 새로운 상황에서 그것들을 대체시킴에 의해서 변형이 일어난다. 그러므로 이것은 인지적 재구성의 대단한 노력이 필요하다.

인식론적 장애의 출현이 일어났고, 일어날 수 있는 느린 발달과 어려움의 시기를 찾아내는 것은 개념의 역사를 연구하기 위하여 유용하다. 극한 개념 역사의 경우에, 우리는 이 개념이 세 개의 중요한 유형의 어려움을 풀기 위하여 소개되어졌다는 것을 알 수 있다 :

· 기하학적 문제(면적 계산, 기하적 길이의 속성에 대한 고려, 착출법)
· 급수의 합과 수렴 비율의 문제
· 미분 문제(동시에 0 에 접근하는 두 양 사이의 관계로부터 나옴)

극한 개념의 역사에서 다음과 같은 네 가지 인식론적 장애가 있다.

· 기하를 수에 연결짓는 것의 실패
· 무한히 크거나 무한히 작은 것에 대한 개념

· 극한 개념에 대한 초물리적 측면

· 극한은 도달할 수 있는가, 혹은 없는가?

가. 기하를 수와 연결짓는 것의 실패

그리스가 BC400 300년경에 수학에 관심을 나타냈을 때, 우리는 왜 극한 개념이 그 당시 분명하지 못했는지에 관심을 가진다. 예로써, 원의 넓이를 계산하는 문제는 극한 개념과 아주 비슷한 도구를 개발할 기회를 제공했다. Chios의 Hippocrates(BC 430)는 두 원의 넓이의 비가 지름의 제곱의 비와 같다는 것을 증명하기를 원했다. 그는 원 내부에 정다각형을 내접시키고, 변의 수를 무한히 증가시킴에 의해서, 두 원의 넓이에 접근했다. 각 단계에 내접 다각형의 면적의 비는 지름의 제곱의 비와 같고, '극한에서' 그것은 원의 면적과 같아지게 된다. 극한에 대한 이러한 논쟁은 1년 뒤에 Cnidos의 Eudoxus(BC 408 255)에게 돌아간 착출법에 의해서 정의되었다. 이 방법은 Eudoxus의 원리에 기초를 두었다. 그 원리는 "길이가 다른 두 개의 길이가 주어진다. 길이가 긴 것으로부터 길이의 반보다 더 큰 쪽이 택해진다. 택해진 것과 남아있는 것의 더 큰 쪽이 택해진다. 이 두 과정이 계속된다면, 남아 있는 것이 두 번째 길이보다 작게 되는 때가 온다". 다시 말해서, 연속된 반감에 의하여, 우리는 우리가 원하는 만큼 작은 크기를 얻을 수 있다. 이것으로부터 우리가 주어진 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 정다각형의 넓이와 원의 넓이와의 차이가 ε보다 적게 되는 원에 내접하는 정다각형이 존재한다고 진술할 수 있도록 해주는 착출법의 원리가 뒤따른다. 두 원의 넓이의 비가 A_1/A_2이고 반지름의 제곱의 비가 r_1^2/r_2^2이라면, 다음과 같이 세 가지 경우 중에 하나이다 :

$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

우리는 착출법의 원리에 의해서 처음 2개를 제거하고, 원하는 등호가 성립한다는 것을 추론한다. 그러나 착출법이 극한 개념과 대단히 유사하다는 사실에도 불구하고, 우리는 그리스가 현대적인 극한 개념을 가지고 있었는지 확신할 수 없다. 착출법은 본질적으로 무한의 문제를 다루지 않고 결과의 증명을 허락해주는 기하학적 방법이다. 그것은 수가 아닌 기하적 크기에 응용되어진다. 각 경우는 기하적 상황에 맞추어진 특별한 논의를 사용하는 개인의 기초에서 다루어진다. 기하 도형으로부터 순수한 수의 해석으로의 전이가 없었다. 그래서 수의 극한에 대한 통일된 개념이 없다. 기하적 해석과 적당한 문제를 푸는 데서의 성공은 수치적 극한의 개념으로의 통로를 막는 장애의 원인으로 보여진다.

나. 무한히 크거나 무한히 작은 것에 대한 개념

극한 개념의 역사를 통해서 우리는 무한히 작은 양의 존재의 가설에 접한다. 거의 0 이 될 정도로 작아 특별히 '할당된 크기를 가지지 않는 양을 가진다는 것은 가능한가?' 이러한 양 중의 하나가 0 이 되는 순간에 무엇이 일어날까? 그 같은 철학적 문제는 Newton같은 많은 수학자들의 주의를 끌었다. Newton은 그것들이 그에게 '궁극적인 비'를 계산할 수 있도록 하기 위해 사라지는 순간에 '지나간 양의 영혼'을 말했다. Euler는 적당한 순간에 0 과 같다고 생각되어질 수 있는 양만큼 무한히 작은 개념을 자유롭게 이용하였다. D'Alembert는 무한히 작은 양의 사용을 반대하였고 미분에서 그것들을 없애려고 노력하였다. 그는 양은 존재하던지 존재하지 않는 것으로 생각했다. 양이 존재한다면 그것은 0 이 될 수 없고, 그것이 존재하지 않는다면 그것은 이미 0 이다. 그러므로 그는 둘 사이에 중간적 상태가 있다는 가설은 무모한 꿈으로 설명하였다.

Cauchy는 또한 무한히 작은 것에 관한 언어를 사용하였다. 1921년 Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique에서, 그는 다음과 같은 용어로 연속함수를 정의하였다 :

> 함수 $f(x)$는 만일 이러한 극한들 사이에 변수 x에서 무한히 작은 증분 i가 함수에서 항상 무한히 작은 증분 $f(x+i) - f(x)$를 만들어낸다면 주어진 극한에서 연속이다 (p. 277).

그는 무한소의 개념을 다음과 같이 설명하였다 :

> 수 값이 무한히 작아져서 극한 0 으로 수렴할 때, 변하는 양은 무한히 작게 된다고 말한다.

Cauchy를 위해서, 무한소는 단순히 0 에 접근하는 변수이다. 무인 것과 무가 아닌 것 사이에 '중간적인 상태'의 아이디어는 현대 학생들에게서 빈번히 발견되어진다. 그들은 종종 부호 ε를 0 은 아니지만 어떤 양의 실수보다 더 적은 수를 나타내는 것으로 생각한다. 같은 방법에서 학생들은 0.999…은 '1 앞의 마지막 수'지만 1과 같지 않다고 믿는다. 또한 무한은 아니지만 모든 다른 수 보다 더 큰 정수가 존재한다는 유사한 믿음을 갖고 있다.

다. 극한 개념에 관한 초물리적 측면

극한의 개념은 그것이 초물리와 철학에 더 많이 관계되기 때문에 수학에서 소개한다는 것은 어렵다. 수학자들은 종종 그리스 시대부터 '우리는 미분에서 무한에 관한 이러한 초물리가 없어도 지낼 수 있다'를 썼던 D'Alembert까지, 그러한 개념을 말하기를 꺼려했다. Lagrange는 초물리적 측면의 비슷한 두려움을 표현했다. 비록 초기에 그는 무한소를 정확하게 사용할 수 있다고 믿었을지라도, 후에 Leibniz의 극한소는 만족할만한 초물리적 기초를 가지지 않아서, 완전히 대수적인 용어로 무한 급수를 이용하는 미적분의 기초를 바꾸어야 한다고 생각했다. 그러나 이것은 다음과 같은 이유 때문에 어렵다는 것이 판

명되었다 :

> Lagrange가 일반적인 대수에 의지해서, 미적분에서 극한의 초물리적 어려움을 벗어나려고 노력할 때, 그는 더 큰 어려움을 경험했다. Euler에 의해서 그에게 전수된, 그 당시의 대수는 무한에 대한 잘못된 관점에 기초하고 있었기 때문이다. 무한 급수에 대한 정확한 이론이 만들어지지 않았다 (Cajori.1980).

이러한 방법에서 수학자들은 극한의 역사적 발달에서 어떠한 방법을 취하든지, 그들의 심오한 이론적 어려움에 부딪쳤다.

극한 개념의 초물리적 측면은 오늘날 학생들을 위해서 중요한 장애의 하나이다. 한 인터뷰에서 미적분의 초기 단계가 순수하게 단순한 산술과 대수에 의지하지 않았기 때문에 '극한은 진정으로 수학이 아니다'라고 말한다. 학생들은 "극한은 완전하지 않지만 계산된다", "극한은 존재하지 않는다", "극한은 대단히 추상적이다", "근사값으로 만족한다면, 방법은 옳다"같은 무한 개념을 다루는데 어려움을 가진다. 이러한 장애는 극한 개념의 이해를 대단히 어렵게 만든다, 특히 극한이 대수와 산술의 친숙한 방법을 사용하여 직접 계산할 수 없기 때문이다.

라. 극한은 도달할 수 있는가, 혹은 없는가?

이것은 개념의 역사를 통해서 계속된 토론이다. 예로써 Robins(1697 1751)는 원에 내접하는 정다각형이 원과 같을 수 없는 것처럼, 극한은 도달될 수 없는 것으로 평가했다. 그는 "우리는 변하는 양이 우리가 원하는 만큼 가깝게 접근하지만 절대적으로 같지 않은 '궁극적인 양'을 극한으로 명명했다"고 주장했다. 반면에, Jurin(1685 1750)은 "두 양 사이의 궁극적인 비는 양이 사라지는 순간에 도달되는 비이다", "그것은 증분이 0 이라는 문제가 아니라 그것이 사라지고 있다 혹은 사라지는 순간에 있다", "사라지는 증분의 마지막 비이다", "생성된 증분은 무로부터 존재하기 시작하는 혹은 생성되기 시작하지만

그 같은 작은 양에 할당되어질 수 있는 크기에 도달해야만 하는 증분이다”라고 말했다. D'Alembert는 양은 극한과 결코 같을 수 없다고 주장했다 : 적당히 말하면, 극한은 극한인 양과 결코 일치하거나 같을 수 없지만 항상 접근하고 있고 우리가 원하는 만큼 작은 양으로 다르게 할 수 있다.

이러한 토론은 아직도 우리 학생들에서도 발견된다. 한 토의에서, n이 0 에 가까이 갈 때, n은 0 과 같지 않은가? 라고 묻는다. 학생들 사이에서 다음과 같은 대화는 인식론적인 장애를 분명하게 보여준다 :

· n 이 커짐에 따라서, 1/ *n*은 0 에 점점 더 가까이 간다.

· 우리가 원하는 만큼 가까이 갈 수 있는가?

· 아니다, 왜냐하면 언젠가 그것들은 만날 것이다.

분명히 위에서 설명한 네 가지 보다 더 많은 극한의 개념에 대한 많은 장애가 있다. 학생들이 범하는 실수는 극한의 장애를 찾아내기 위해서 가치 있는 표시이다. 학생을 가르치기 위한 교수 전략의 구성은 그러한 장애를 고려해야만 한다. 장애를 획득되어지는 수정된 수학 개념의 요소의 일부로 본다면, 장애는 회피할 문제가 아니라, 반대로 학생들이 장애를 접하고 극복하도록 이끌어야한다.

2. 현대 수학에서의 인식론적 장애

수학자들의 역사를 되돌아보고, 오늘날 논리적 상태의 기술에 이르게 한, 현대적 아이디어들을 유래시킨 논쟁을 주목해보는 것은 재미있다. 그러나 Hilbert에 의해 시작된 완전한 공리체계에 기초한 확실성을 위한 20세기의 탐구은 Gôdel의 불완전성 이론 때문에 실패해서, 불확실성이 아직도 남아있다. 우리가 ε-δ용어로 극한과 연속의 정의를 공식화할지라도, 우리는 아직도, 결과로써 생겨나는 지적 심상이 ‘임의의 작은’에 연결됨으로써, Cauchy의 정의와 유사한 방법에서 ‘0 에 가까이 가는 변수’의 역동적 언어를 사용할 필요성

이 있다.

인지적으로 이러한 현상은 예상되어질 수 있다. '임의의 작은' 수의 아이디어는 간결화에 대한 Dubinsky의 이론에 의해서, 점점 작아지는 과정의 간결화에 의해 만들어진 대상일 뿐이다. Tall이 가정한 것처럼, '임의의 작은 수'에 대한 정신적 개념 형성은, 간결화된 대상이 과정에서 대상들의 특징을 가질 것이라고 믿어지는 포괄적 극한 개념이다. 그러므로 0 에 접근하는 일련의 수들의 포괄적 극한은 임의로 작지만 0 이 아닌 수들이다. 개념은 심상이 작용하기 위해 가정된 방법의 자연스런 결과이다.

그러므로 현대 해석학으로부터 무한소를 제거하려는 시도에도 불구하고, 비록 그것이 형식적인 증명으로부터 제거되었을지라도 그것은 전문적인 수학자들의 지식이나 의사소통에 살아있게 된다. Robinson(1966)의 저서에서 논리적으로 기초된 극한소의 복귀는 계속된 논쟁의 또 다른 시작이었다. 비록 Robinson은 그의 산뜻한 논리적 해법이 삼 백년 동안의 논쟁을 해결했다고 생각했을지라도, 이것은 그렇지 않음이 판명되었다. 왜냐하면, 실수와 극한소를 포함하고 있는 실수를 초월한 체계에 대한 Robinson의 구조는 선택 공리의 설명에 의존하고 그렇기 때문에 비-구조적이다. 이것은 컴퓨터의 등장이 실용적인 요구에서 수학자들에게 유한 개의 알고리즘을 개념의 구조를 위해서 제공할 필요가 있다는 것에 초점을 두기 시작하면서, 점점 논쟁의 불씨가 되었다. 예로써, 중간값 정리는 구조적으로 보여질 수 있지만, 연속함수의 최대 값의 존재는 보여질 수 없다. 전자는 함수가 반대부호를 가지는 두 지점 사이에 연속 함수의 0 인 점이 존재하고, 단순한 등분 논의에 의해서 컴퓨터로 프로그램화될 수 있지만, 후자는 본질적으로 모순에 의한 비-구조적 증명에 의존한다.

이러한 방법에서, 우리는 Lagrange가 미적분으로부터 초물리적 애매성을 제거하려고 했을 때 문제점의 재발을 이해할 수 있다 : 어려움이 해결되려고 하

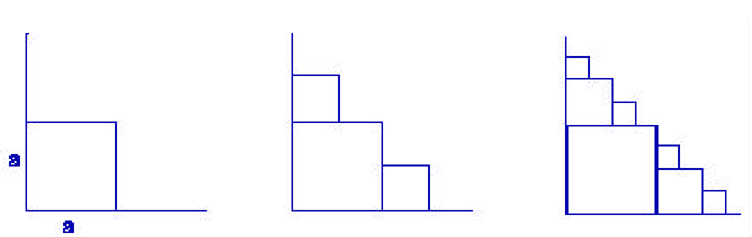
자마자 새로운 어려움이 나타나는 것같았다. 이것은 해석학에서 아이디어와 기본적인 극한 개념의 복잡성을 상징한다.

극한 개념이 본질적으로 어렵다는 것은 그것이 간결화되지 않는 과정에 의해서 정의되어지는 방법에서 보여질 수도 있다 : “다음과 같은 함수 $N(\varepsilon)$이 존재한다”는 형태에서 개념보다는, “나에게 $\varepsilon > 0$을 준다면, 나는 다음과 같은 N을 찾을 수 있다”는 과정 쪽으로 정의된다. 이같이 간결치 못한 어려움의 극점은 초보적인 학생들에게 제시되는 극한에 대한 코스의 시작에서 일어난다.

3. 인식론적 장애의 교수학적 전달

현대 수학의 복잡성과 의미에서 문화적인 색채 때문에, 복잡한 상호작용이 학생들의 학습에 영향을 준다는 것은 놀라운 일이 아니다. 학생들의 인간적인 상호작용에서, 그들은 목소리의 크기와 함축적 의미에 대단히 민감하고, 그 같은 아이디어는 교사에 의해서 학생들에게 전달되어진다. 비록 교과서에서는 그 같은 상황을 피할 수 있을지라도, 그같은 장애는 교사가 학생들을 ‘돕기’위해서 복잡성을 ‘단순화’하려는 과정에서 교사-학생간의 인지적 장애가 일어난다.

Orton(1980)이 ‘발판으로서의 계단’에 의해서 극한 개념을 조사했을 때, 그는 학생들에게 다음과 같은 <그림2>를 보여주고 다음과 같은 질문을 하였다.



<그림2> 무한 계단

(1) 만일 이러한 절차가 무한히 반복된다면, 마지막 결과는 무엇인가?

(2) 이 '마지막 결과'에 도달하기 위해서, 몇 번의 과정을 거쳐야하는가?

(3) 마지막 모양의 넓이를 'a'로 어떻게 표현할 수 있을까? 즉, '마지막 계단' 밑의 넓이는 얼마인가?

만일 한 학생이 (c)에 대답하는 공식을 제안했다면, 그는 질문한다 : 당신은 이공식을 '마지막 항' 즉 수열의 극한을 얻기 위해 사용할 수 있는가?

이 '마지막 항'의 용어를 사용한 그의 이유는 다음과 같다 :

'마지막 항'의 표현은 학생들이 극한의 의미를 이해하는데 돕기 위한 시도에서 다시 사용되었다.

그러나 포괄적인 극한 개념의 관점에서 '마지막 계단'같은 용어는, 학생들에게 극한의 의미를 이해하는데 도움을 주지 못하고, 학생들이 '무한개의 발판'을 가진 계단으로 생각하는 포괄적인 극한 개념을 만들어내는 것은 분명하다. 이러한 방법에서, 복잡성을 도우려는 우리의 모든 시도에도 불구하고, '단순화'하려는 우리의 시도는 직접적으로 우리가 앞에서 설명했던 인지적 장애를 낳는다.

그같은 장애는 학습 과정의 거의 본질적인 부분이다. Pavis & Vinner(1986)는 오개념이 반드시 일어나는 불기피한 단계가 있다고 제안했다. 그들은 또한 부적절한 이미지를 자발적인 개념에서 불러오는 언어의 사용으로부터 일어나는 오개념을 밝혔다. 비록 그들이 '극한'이라는 단어가 처음단계에서 사용되지 않는 과정을 가르치려고 시도했을지라도, 그들은 수학 이전의 지적 표상 쪽에서 생각하라는 호소는 소용이 없다고 결론을 내렸다. 그들은 또 다른 문제가, "새로운 아이디어들의 복잡성에서 일어난다. 새로운 아이디어들은 한 순간에 완전한 상태로 생길 수 없어, 새로운 아이디어의 어떤 부분은 이전의 어떤 부분의 쓸만한 표상을 얻게 된다"는 것을 관찰했다. 이처럼, 특별한 예가 학습을 지배하고 그래서 단조 수열이 학생들의 이전의 경험에서 특징을 이룰 때, 그것들이 학생들의 개념 이미지를 지배한다는 것은 놀랄만한 것이 아니라는 증거를 보여주었다.

위에서 살펴본 바와 같이, 극한 개념은 개념의 복잡성과 인지적 장애 때문에 극한 개념의 교수를 어렵게 만든다. 지금까지의 연구는 극한에 대한 학생들 자신의 개념들이 다양하고, 그들의 인식론적 장애를 극복하지 못하고 있음을 보여준다. 그러므로 교사들은 극한을 교수하기 전에, 학생들이 학습 과정에서 필연적으로 이용하게 될 자발적인 아이디어, 이미지, 직관, 경험 등을 인식하도록 하기 위한 적당한 활동이 필요하다. 이러한 활동을 통해서 학생들은 그들의 지식 구조를 재구성하여 극한 개념을 배우는 활동에 능동적으로 참여하도록 하는 것이 대단히 중요하다고 할 수 있다.

B. 오 류

1. 수학 교육에서의 오류분석

수학 교육에서 오류 분석은 오랜 역사를 갖고 있다. 미국에서 Buswell & Judd (1925)는 산술적 오류의 진단을 다루는 30편의 논문을 인용했다. 그 당시 같은 주제에 대한 연구는 독일에서도 많았다(Weimer,1925 ; Seeman, 1929). 두 나라에서 학생들 오류의 분석은 당시의 심리학적, 교육적 연구와 교육 정책, 학교의 구조 등의 차이 때문에 출발점과 관심이 다르게 특징 지워진다. 오류에 대한 미국 연구의 방법과 가정은 행동주의에 근거를 둔 반면에, 유럽에서는 형태심리학적 측면과 교육 개혁 사상이 영향을 주었다.

최근에 산수 계산의 오류에만 제한하지 않은 오류 분석에 증가된 관심을 보여주고 있다(Radatz ,1979). 이러한 발달의 이유는 다음과 같다 :

(1) 수학 교육에서 규준 지향(norm-referenced)과 준거 지향(criterion-referenced) 성취 테스트에 대한 실망과 회의는 교수의 진단적 측면에 대한 주의를 증가시켰다.

(2) 수학 내용과 교육 과정의 개혁은 아마도 어려움과 오류를 줄이지 못했다 : 개혁은 새로운 오류와 특별한 내용의 오류를 증가시켰다.

(3) 수학 교육의 개인화와 분화는 난이도의 기술적이며 명확한 진단을 요구했다 : 교사는 수학 내용의 측면이 교육적이며 사회적 심리학의 연구 결과로 통합되어지는 진단적 교수를 위한 행동 모형이 필요하다.

(4) 경험적 연구를 위한 전통적 모형의 비판은 수학 교육에서 다른 연구의 방법을 자극했다. 이러한 맥락에서, 최근의 많은 연구가 인용되어질 수 있다.

학생들 개인의 어려움에 따라 오류를 분류할 때, 물론 우리는 오류가 교육과정에서 다른 변수들의 함수라는 것을 인식해야한다(교사, 교육 과정, 환경 그리고 이러한 변수들 사이의 가능한 상호 작용). 수학 학습에서 오류는 대단히 복잡한 과정의 결과이다. 주어진 오류의 가능한 원인들의 명확한 구분은 때때로 대단히 어렵다. 왜냐하면 원인들 사이에는 밀접한 상호작용이 있기 때문이다.

Radatz(1979)는 오류를 정보 처리적 과정 분류에 따라, “수학 내용에서 일어나는 오류의 다양한 원인은 수학 과제에 포함된 정보를 얻고, 처리하고, 파지하고, 재생산하는데 사용되는 메커니즘을 조사함으로써 확인되어질 수 있다” 고 하였다. 그는 수학적 오류를 다음과 같이 분류했다.

· 언어적 어려움 때문에 일어나는 오류

많은 학생들을 위해서, 수학적 개념, 부호와 어휘의 학습은 생소한 과정이다. 수학 교과의 의미에 대한 잘못된 이해는 종종 학생들 오류의 원인이다. 문장제 문제의 해법은 특히 일상적인 언어에서 수학적 언어로 형식적 구조를 번역할 때 오류가 일어나기 쉽다(Aiken, 1972 ; Krane, Byrne & Harter, 1974 ; Pippig, 1977).

· 공간적 지식의 획득의 어려움에 따른 오류

초등학교와 중학교 수학 교과서는 수학 정보의 부호적, 시각적 표상 쪽으로 증가된 경향을 보여준다. 많은 수학적 오류는 학생들의 공간적 상상력과 공간적 사고에서 실제적인 개인 차이의 결과이며(Jakimansjaya,1976), 학생들이 수학 과제의 실행에서 시각적, 공간적 정보를 얻는 것에 따른 어려움의

결과이다.

· 선행 기술, 사실과 개념의 미숙에 따른 오류

이러한 유형의 오류는 수학 과제의 성공적 수행을 위하여 필요한 내용과 문제 특성의 지식에서의 모든 결핍을 포함한다. 기본 전제 조건에의 결핍은 알고리즘을 모름, 기본 사실들의 부적절한 이해, 필요한 개념과 부호에 관한 불충분한 지식을 포함한다. Bloom(1976)은 우리들이 보통 학습 결과에서 볼 수 있는 커다란 변형에 대해 그 같은 변인들이 작용하는 중요한 역할을 강조했다. 학교에서 학습에 대한 학생들의 경험들은 특히 수학적 학습과제를 위해서 유용한 이전 지식의 요소에서 커다란 개인차를 제공한다.

· 부정확한 결합 혹은 사고의 경직성에 따른 오류

부정적 전이로부터 일어나는 오류들은 수학 교육과정에서 오류 분석에 대한 분석에서 잘 알려져 있다. 그것들은 문제 해결 과정 연구에서 특별히 중요하게 되었다(Einstellung effect). 새로운 정보를 풀고, 추가하는데 부적절한 적응성은 종종 유사한 문제에 대한 경험의 사고의 습관적인 경직성을 일으킨다는 것을 의미한다. 그 같은 경우에, 학생들은 인지적 작용을 발달시키고 수학 과제의 기본 조건이 변했음에도 불구하고 그것들을 계속해서 사용한다. 내용의 어떤 면이나 문제 처리의 어떤 측면이 마음속에 계속 남아서, 새로운 정보의 처리를 억제한다.

· 부적절한 규칙이나 전략의 응용에 따른 오류

수학 과제와 문제 해결에서 부적절한 규칙의 사용, 부정확한 알고리즘의 발달, 부적절한 전략 응용과 같은 주제는 수학 학습에 대한 연구에서 특히 중요시되었다. 이러한 종류의 오류는 종종 다른 내용 분야에서 비교되는 규칙 혹은 전략의 성공적인 응용에 대한 경험에서 유래한다.

이러한 맥락에서 우리는 Erlwanger(1975)와 Ginsburg(1977)의 연구를 언급할 수 있다. Ginsburg는 "전형적으로 학생들의 오류는 체계적인 규칙에 기초

한다. 오류는 좀처럼 변화하지 않는다. 종종 학생들은 수학을 특별한 규칙을 지닌 동떨어진 게임이며 현실과 직접적인 관계가 없는 것으로 생각한다”.

수학 특히 산수를 임의의 규칙을 지닌 게임으로 생각하는 학생들의 이해는 학생들의 오류의 많은 원인을 분석하기 위한 배경을 제공할 수도 있다. 다양한 전략과 규칙의 의미가 이전에 언급한 각각의 원인에 대한 많은 오류에서 인식될 수도 있다.

수학에서 오류에 관계된 정보 처리의 첨가된 측면은 문제의 적절한 상황을 고려하는 것에 대한 실패, 풀이 과정을 완성하는 것에 대한 실패, 직접적인 해법의 부족과 개념의 일방적인 사용을 포함한다.

2. 문제해결에서의 오류의 모형

계산에서 오류 모형을 분석하는 과정(Ashlock, 1976 ; Brown & Burton, 1978)은 교사와 학생들에게 유익하다는 것이 증명되었다. 이러한 분석을 통하여 교사들은 학생의 오류가 종종 체계적이라는 것을 인식하게 되었다. 계산 오류 분석은 또한 학생들이 틀린 답에 도달하는데 사용하는 많은 다른 방법을 밝혀냈다. 교사가 오류 형태를 인식함에 따라서 그들은 종종 계산적 오류를 일으키는 오개념을 고치기 위해 교수법을 수정할 수도 있다.

문제해결에서 오류 형태에 대한 교사의 지식은 여러 가능한 결과를 갖는다. 첫째, 오류 유형에 관한 교사의 지식은 오류의 원인에 대하여 학생들에게 정확한 피드백을 제공한다. 둘째, 오류 유형은 종종 수학 개념의 기초적인 잘못된 이해, 문제 해결 전략의 부족, 그리고 교수 계획의 초점이 될 수 있는 미성숙한 문제 해결 전략을 나타낸다(Sowder, 1988).

Babbit(1990)의 논문은 5 6학년 수학 교재의 문제들과 유사한 여러 가지 완전 수를 사용하는 전통적인 1단계 문장제 문제들에 대한 오류 형태와 그것

들의 가능한 원인들을 설명했다. 오류 빈도의 확인은 4차 NAEP(Kouba, Brown, Carpenter, Lindquist, Silver, & Swafford, 1988)와 남 캘리포니아의 431명의 5 6학년 학생들에 대한 문제 해결의 연구로부터 나온 것이다.

Babbit(1990)은 문제 해결 오류를 네 부류로 나누었다 : 계산 오류, 연산 오류, 잡다한 오류, 시도하지 않은 오류. 더불어 학생들의 오류 분석을 위해서 학생들의 인터뷰를 통한 더 많은 연구가 학생들의 풀이 과정을 연구하기 위해 필요하다(Liedtke, 1988)고 할 수 있을 것이다.

· 계산 오류

가장 빈번한 문제 해결 오류는 계산에 있다(Kouba et al., 1988; Muth, 1984; Syndam & Riedesel, 1969). 예로써, 5 6학년 학생들의 13 18%가 문장제 문제를 풀 때 요구되는 세 자리 뺄셈에서 계산 오류를 범했다(Babbit, 1986). 이것은 7학년 학생들에게는 15%이다(Kouba et al., 1988). 5 6학년 학생의 30%이상이 세 자릿수 곱하기 두 자릿수와 네 자릿수 나누기 두 자릿수에서 계산 오류를 범한다. Kouba et al.(1988)은 재분류를 요구하지 않은 문제에서 7학년 학생의 23%가 여러 가지 곱셈 오류에 빠진다고 보고했다. 계산 오류는 여러 자리수가 사용될 때, 문제 해결 실행에 중요한 영향을 끼친다.

· 연산 오류

연산 오류는 문제 해결 오류의 두 번째 중요한 원인이다(Bell, Costello, & Kuchman, 1983). 곱셈과 나눗셈 문장제 문장에 대해 5 6학년의 오류의 거의 반이 연산의 부정확한 선택 때문이다. 5 6학년은 네 가지 유형의 연산 오류를 범한다 : 역 연산, 단순 연산, 임의 선택 그리고 미성숙한 전략의 사용.

학생들은 빈번히 역 연산을 사용한다. 그들은 더해야만 할 때 빼거나, 나누어야할 때 곱하는 오류를 범한다. 어떤 학생들은 문제에서 요구하는 것보다 더 단순한 연산을 선택한다. 곱셈을 위해서, 가장 빈번하게 사용되는 부정확한 연산은 덧셈이다. 때때로, 연산의 선택이 임의적으로 나타난다. 어떤 나눗

셈 문제에 대해서, 부정확한 연산은 덧셈, 뺄셈, 곱셈사이에 대등하게 분포한다. 학생들이 중요 단어, 수의 크기 혹은 숫자의 개수에 기초한 연산을 선택하는 미성숙한 전략이 많은 학생들에 의해서 사용되어진다(Sowder, 1988). 학생들은 두 수가 같은 자리수라면 더하거나 곱하려는 경향이 있다. 한 수가 다른 수보다 자리수가 더 크면, 그들은 나누려한다. 많은 학생들은 문제를 해결하기 위해서 어떤 연산을 사용해야하는 가를 결정하는데 어려움이 있다.

· 잡다한 오류

학생들은 종종 정확한 연산을 선택하지만, 문장제 문제를 정확하게 해결하는데 실패한다. 그러한 결함은 일반적으로 사용되어지는 정보에 있고, 도중에 그것이 문제 계산을 시작할 때 사용되어진다. 이러한 잡다한 오류는 관계없는 정보의 오류, 언어 순서의 오류와 다른 고유한 오류를 포함한다.

· 관계없는 정보 오류 : 관계없는 정보의 사용은 공통적인 문제 해결 오류이다. Kouba et al.(1988) 은 3학년의 26%, 7학년의 16%가 세 수가 주어지지만 단지 두 수만 필요한 덧셈 문제의 풀이에서 관계없는 정보를 사용한다고 보고했다. 5 6학년의 20%가 비슷한 문제의 풀이에서 관계없는 정보를 사용한다(Babbit, 1986).

· 언어 순서 오류 : 문장 언어의 순서가 오류에 영향을 준다. 학생들은 종종 제시된 수의 순서에 따라서 문제를 시작한다. 이것은 교환법칙이 성립하는 덧셈과 곱셈을 계산하는 것처럼, 뺄셈과 나눗셈을 계산하는 과정에서 오류가 생긴다. 7%의 학생들이 이러한 오류를 범한다.

· 고유한 오류 : 때때로 고유한 오류는 학생들의 해법에서 나타난다. 한 학교의 5 6학년 학생들은 다른 학교의 비슷한 학생들보다 많은 빈도로 나눗셈 문제의 해로서 나머지를 사용했다. 재미있게도, 학생들이 그들의 해를 고안된 답지에 옮기도록 요구하기 때문에 일어난다. 유일한 오류는 단지 학생들의 정교함과 교육적인 불충분에 의해서 영향을 받는다.

· 시도하지 않은 오류

초등학교 고학년 학생들은 대부분 완전수 문제를 해결하지만, 문제가 어려워짐에 따라서 문제를 시도하지 않은 경우가 증가한다. Babbit(1990)는 자신의 연구에서, 5 6학년 학생들에 의해서 정확하게 틀린 문제들은 그들의 99%가 시도했었다. 32%의 학생들만이 정확하게 풀었던 문제는 91%의 학생들에 의해서 시도되었다. 5 6학년은 쓰여진 계산을 요구하는 대부분의 덧셈, 뺄셈 문제를 시도하였다. 몇 가지 시도하지 않음은 곱셈(1.4 2.8%)에서 나타나지만 나눗셈은 학생들이 가장 기피하는 (2.6 9.0%가 시도하지 않음)연산이다라고 보고하였다.

학생들의 인터뷰는 시도하지 않은 원인을 탐구하는 가장 좋은 수단을 제공한다. 연구 방법은 문제를 읽는 학생의 능력, 복잡한 계산이나 연산의 불확실성에 대한 회피, 문제를 푸는 시간의 부족을 포함한다. 시도하지 않은 오류의 원인은 미래의 교육을 안내할 것이다. 낮은 수준의 학생들이 문장제 문제를 해결할 때 계산기를 사용하도록 허락할 때, 시도하지 않음을 줄일 수 있다는 것을 보여주고 있다 (Babbit, 1986).

위에서 수학 문제 해결의 네 가지 중요한 오류를 설명하였다. 각각의 오류와 그것에 속하는 오류는 교사의 입장에서 특별한 교수 전략을 요구한다. 계산 오류에서 학생들은 문제 상황은 이해하지만 계산을 실행하는데 도움이 필요함을 보여주고 있다. 반면에 연산 오류는 문제 상황의 이해 부족을 반영한다. 학생들은 각각의 연산이 언제, 어떻게 사용되어질 수 있는가에 대한 교육이 필요하다. 미성숙한 전략의 사용은 일반적으로 학생들이 수학적인 개념을 참고하지 않고 문제를 해결하고 있다는 것을 의미한다. 학생들은 문제를 이해하는 것보다는 해를 얻는 것이 중요하다고 인식한다. 그러므로 교사들은 해를 얻는 것보다도 바람직한 전략을 생각해내고 실행할 수 있도록 교수의 초점을 둘 필요가 있다. 잡다한 오류에서, 교사들은 기대되는 순서와 예상되지 않은

순서를 섞어 놓은 다양한 문제를 제시하고, 문제 해결을 위해서 무엇을 결정하고, 어떠한 자료를 선택할 것인가를 강조하는 교수 전략이 필요하다. 시도하지 않은 오류는 학생들이 시도하지 않은 다양한 원인을 파악할 것이 요구되어진다. 그러므로 문제 해결 오류 분석은 교수와 학생의 학습을 개선시키기 위해서 사용되어질 수 있을 것이다.

3. 고등학교 수학에서 오류를 위한 경험적 분류 모형

Radatz(1980)의 역사적 조사에 의하면, 오류 분석은 지난 70년 동안 수학교육에서 관심이 되어왔다. 연구의 관심은 다음 다섯 가지 목적에 초점을 두었다 :

(1) 모든 잠재적 오류를 나열하기
(2) 연령에 따른 오류들의 분포 결정하기
(3) 나눗셈할 때와 0이 속한 연산을 할 때 직면하는 특별한 어려움을 분석하기
(4) 개인의 오류의 지속성 결정하기
(5) 오류를 분류하고 그룹 지으려는 시도하기

오류 분석에 관한 많은 연구는 계산에서의 오류에 관심을 두어왔다. 그러나 지난 10년 동안에 더 발전된 주제에 대한 학생들의 오류는 고학년 학생들의 수학에 대한 어려움의 연구를 위한 중요한 정보가 되었다(Davis & Cooney, 1977; Hart, 1981; Quintero, 1983).

Movshovitz-Hadar, Orit, & Shlomo(1987)은 다섯 가지 오류 유형을 확인했다 :

(1) 학생들은 어떤 특별한 자료를 더하거나 무시한다.
(2) 학생들은 언어적 표현을 다른 의미를 가진 수학적 표현으로 변형한다.
(3) 학생들의 추론은 논리적으로 부적절하다.
(4) 학생들은 정의나 정리의 부적절한 번역을 적용한다.
(5) 학생들은 기본적인 계산에서 오류를 범한다.

이러한 모형은 교사들이 어려움과 장애를 예상하는데 도움을 주고, 가능한 많은 어려움이나 장애를 예방하기 위해 교수 계획을 세우는데 사용할 수 있다. 교사들은 또한 학생 개인이 여러 수학 주제에서 어떤 모형의 오류를 범하는 지속적인 경향을 확인하는데 사용할 수도 있다. 이러한 강조는 그러한 모형의 오류에 목적을 둔 특별한 치료 계획을 제시할 수도 있다. 더 많은 연구는 어떤 교수 유형 혹은 인지 유형이 특별한 유형의 오류의 원인이 되는가를 발견할 필요가 있다. 모형의 또 다른 가능한 적용은 선다형 항목의 좋은 예들을 제공해준다.

Movshovitz-Hadar, Orit, & Shlomo는 다음 여섯 가지 오류의 분류를 고등학교 수학에서 분류되어진 오류를 위한 모형으로써 제시했다 :

(1) 잘못 사용된 자료
(2) 잘못 해석된 문제
(3) 논리적으로 부적당한 추론
(4) 왜곡된 정리 혹은 정의
(5) 증명되지 않을 해법
(6) 기술적 오류

· 잘못 사용된 자료 : 이 오류는 문제에 주어진 자료와 피험자가 처리하는 자료 사이의 일치하지 않음과 관계된 오류를 포함한다. 그 같은 오류는 처음에 자료들을 함께 놓고서, 나중에 자료들을 처리하는 동안에 범하게 된다.

· 잘못 사용된 언어 : 이 오류는 한 언어에서 설명된 수학적 사실을 다른 언어로 잘못 옮기므로써 일어나는 수학적 오류를 포함한다.

· 논리적으로 잘못된 추론 : 이 오류는 잘못된 추론을 다루고, 특별한 내용을 다루지 않는 오류, 즉 주어진 정보로부터 잘못 유도된 새로운 정보를 포함한다.

· 왜곡된 정리 혹은 정의 : 이 오류는 특별하고 동일시 할 수 있는 원리, 규칙, 정리와 정의에 대한 왜곡을 다루는 오류를 포함한다.

· 증명되지 않은 오류 : 이 오류의 특징은 피험자에 의해서 수행된 각 단계

는 옳지만, 제시된 최종 결과가 진술된 문제에 대한 해가 아닌 오류를 포함한다.

· 기술적 오류 : 이 오류는 계산적 오류(예, 7×8=54), 표로부터 자료를 끌어내는데 있어서의 오류, 기본적인 대수 부호의 조작에서의 오류와 초등학교와 중학교에서 숙달되지 못한 알고리즘의 실행에서의 오류를 포함한다.

이밖에도 학생들이 증명학습에서 나타나는 오류에 관한 여러 연구들(Galbraith, 1981 ; Beker, 1982 ; Vinner, 1983 ; Fischbein & Kedem, 1982)이 있다.

Fischbein & Kedem(1982)은 아동들이 정확히 증명된 어떤 수학적 명제가 선험적이고 타당하다는 것을 이해하고 있는지에 대해 조사 연구하였다. 그들은 학생들의 오류를 다음과 같이 분류하였다 :

(1) 일관되게 형식적인 오류
(2) 일관성이 없는 오류
(3) 일관되게 경험적인 오류
(4) 증명을 거절하는 오류
(5) 기타.

수학 문제에서 학생들 오류의 가능한 원인과 진단 방법들의 연구는 몇 가지 점에서 교수 전략을 위한 초점이 될 것이다.

첫째, 수학 학습에서 오류는 단지 정확한 해답의 부재 혹은 관계없는 사건의 결과만은 아니다. 그것들은 그것들의 속성이 발견될 수 있는 정확한 과정의 결과이다(Ginburg, 1977 ; Menchinskaya & Moro, 1975). 둘째, 개인의 정보처리 과정에 의하여 오류의 속성과 기본적인 원인을 분석하는 것이 가능하다. 셋째, 오류의 분석은 학생들이 수학을 배우는 과정에 대한 연구를 위한 다양한 출발점을 제공한다. 넷째, 오류의 진단적이고 원인 측면에서의 고려는 수학 교사들이 교육 과정 내용의 지식에 학생들의 개인차에 대한 지식을 통합할 수 있도록 하는 특별한 도움을 제공한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. 연구 대상

본 연구를 수행하기 위해서 대전 광역 시 여섯 개의 여자 고등학교 중에서 연구자가 임의로 일 개교를 선정한 후 2학년 12학급 중에서 2개 반(문과) 96명의 학생을 대상으로 한다. 학생들은 경제 문화적 수준이 중위권이고 학력 수준은 비교적 높은 수준에 있으며, 극한 단원을 학습한 학생들이다.

B. 검사도구

1. 문항의 개발

본 연구에서 사용한 검사 도구는 본 연구자가 개발하여, 현장 교사들과 협의하고 검토한 후에 전문가에게 타당성을 검증 받았다. 검사지는 학생들의 극한에 대한 오개념과 오류를 검사하기 위하여 현행 고등학교 교과서 수준의 난이도로써 만들어졌다. 검사지의 개발 과정에서 문항의 수, 문항의 난이도, 검사 실시 시간의 적절성 등을 알아보기 위하여, 1차의 예비 검사를, 검사 대상 학생들과 학력 수준이 비슷한 C시의 여자 고등학교에서 수학 교사의 협조 아래 실시하였다. 이 검사지는 10개의 문항으로 구성되어 있으며, 문항의 내용에 따른 특성을 고려하여 여덟 종류로 나눌 수 있다 : (1) 수열의 극한의 계산, (2) 무한 급수의 수렴과 발산, (3) 무한 급수의 수렴 조건, (4) 함수의 극한의 계산, (5),(6) 함수의 극한, (7) 함수값과 극한값, (8),(9) 함수의 연속, (10) 극한 및 연속 함수의 정의.

(1)을 통하여 수열의 극한에 대한 문제를 풀 수 있는가를 조사하고, (2)를

통하여 무한 급수의 수렴과 발산을 조사하고, (3)을 통하여 무한 급수가 합을 가지기 위한 공비의 조건을 조사하고, (4)를 통하여 함수의 극한에 대한 문제를 풀 수 있는가를 조사하고, (5),(6)을 통하여 함수의 극한에 대한 개념을 조사하고, (7)을 통하여 함수값과 극한값의 개념을 조사하고, (8),(9)를 통하여 함수의 연속, 불연속을 조사하고, (10)을 통하여 극한(수열의 극한, 함수의 극한)에 대한 형식적 정의 및 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 연속의 정의를 조사했다. 각 문항의 특성은 다음과 같다 :

<표Ⅲ-1> 문항의 특성

문항번호	문 제 내 용	그래프의 제시
1-(1)	수열의 극한 계산	
(2)	수열의 극한 계산	
(3)	수열의 극한 계산	
(4)	수열의 극한 계산	
2	무한 급수의 수렴과 발산	
3	무한 급수의 수렴 조건	
4-(1)	함수의 극한의 계산	
(2)	함수의 극한의 계산	
5	불연속 함수의 극한	○
6	tan함수의 극한	○
7	함수값과 극한값	○
8-(1)	함수의 연속 불연속	○
(2)	함수의 연속 불연속	
9	함수의 극한과 연속	○
10-(1)	수열의 극한의 정의	
(2)	함수의 극한의 정의	
(3)	함수 f(x) 의 x=a에서의 연속 정의	

C. 검사 방법 및 절차

1. 예비 검사

예비 검사는 본 검사에서 사용할 검사 도구의 신뢰도 및 타당도를 확인하기 위해서 실시하였다. 즉 평가 문항에 응답하는데 소요되는 시간과 문항 수준의 적절성, 문항의 수 그리고 응답율 등을 알아보기 위하여 실시하였다.

예비 검사는 본 검사 대상들의 학력과 비슷한 충청남도 C시에 있는 여자 고등학교 2개 반(99명)을 대상으로 1996년 6월 26일에 수학 교사의 협조아래 실시하였다. 예비 검사 결과 정답율이 80% 이상인 2개의 문제는 제외시켰다.

2. 본 검사

예비 검사를 통하여 수정 · 보완된 본 검사지를 연구 대상으로 표집된 여자 고등학교 2학년 2개 반(96명)을 대상으로 실시하였다. 검사 자료의 신뢰성을 높이기 위하여 해당 교사와 다음과 같은 점을 논의하였다 :

(1) 검사 전에 학생들에게 검사의 목적과 답안 작성요령 등에 대해서 자세히 설명한다. 답지는 별도로 마련하지 않고, 검사지에 바로 기입하도록 한다.
(2) 검사에 소요되는 시간은 50분으로 한다.
(3) 검사 실시 후 문제지는 모두 회수한다.
(4) 문제에 대해 질문하고자 할 경우에는, 손을 들고 질문하도록 한다.
(5) 학생 상호간에 영향을 끼치지 않도록 한다.

본 검사는 1996년 8월 28일에 실시하였고, 투입된 자료는 100%수집되었다.

D.자료의 처리 및 분석

1. 오개념에 대한 분석

오개념 분석은 학생들이 개념 검사지 10번 문항에 대해 직접 기술한 내용을 보고, (1)수열의 극한, (2)함수의 극한, (3)연속 함수의 형식적 정의에 대하여 학생들이 어떠한 오개념을 가지고 있는지를 정답, 오답, 무응답의 비율을 백분율로 나타내어 분석하였고, 오답 즉 오개념에 대한 예들을 제시하였다.

2. 오류의 분석

오류 분석은 연구 대상자들이 검사지에 직접 기록한 풀이 과정을 보고 분석하였다. 문항에 대하여 완전한 답을 제시했거나, 전혀 응답하지 않은 것 그리고 풀이 과정에서 끝까지 풀지 못하고 중간에 그만 두었거나 답만을 제시한 것은 오류 분석의 대상에서 제외시켰다. 같은 문제의 풀이 과정에서 반복된 오류는 첫 번째 오류만 분석하였고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다. 96명의 학생들로부터 504개의 오류를 뽑아내 분석하였다.

본 연구에서 오류의 모형은 Movshovitz-Hadar, Orot, & Shlomo가 고등학교 수학 시험에서 오류를 위한 분류 모형-잘못 사용된 자료, 잘못 해석된 문제, 논리적으로 부적당한 추론, 왜곡된 정의 혹은 정리, 검증되지 않은 해법, 기술적 오류-를 참고로 하여, 문제의 특성을 고려하여 다음과 같이 네 가지 모형을 설정하여 분석하였다 :

(1) 기술 오류(연산 오류, 계산 오류)

(2) 논리적으로 부적당한 추론

(3) 잘못 사용된 정의 및 정리

(4) 애매한 오류(해석 불가능하거나 엉뚱한 해)

3. 자료의 분석 방법

'연구 문제 1'을 해결하기 위해서, 검사지에 나타난 학생들의 개념 정의가 교과서에서 제시된 형식적 정의와 어떻게 다른가를 알아보고 (1) 수열의 극한 (2) 함수의 극한 (3) 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 연속성에 대하여 각각 정답, 오답, 무응답의 범주별로 학생들의 반응 빈도를 백분율을 써서 계산하였으며, 오개념에 대한 예들을 제시하였다.

'연구 문제 2'를 위해서, 학생들의 검사지에 나타난 오류들이 전체 오류에 대한 각각의 모형의 범주를 백분율로 나타냈으며, 각 문항에 따라서 그 문항의 정답율, 모형에 따른 오류의 개수를 제시하였으며, 해당 문항의 오류의 개수에 대한 각 오류 모형의 반응 빈도를 백분율로 나타내었다.

Ⅳ. 결과 및 논의

A. 오류 모형의 설정

오류 모형은 학생들이 문제 풀이 과정에서 범하는 오류를 분류해보고, 그에 맞는 명칭을 붙이는 것으로서 다음과 같은 면에서 긍정적인 역할을 한다 : 적절한 오류 분석은 학생들에게 오류의 원인에 대한 정확한 피드백을 제공해 줄 수 있다. 오류 모형에 대한 교사의 지식은 학생들의 수학 개념의 잘못된 이해, 문제 해결 전략의 부족을 이해하여 이러한 오류의 치료 및 예방을 위한 교수 계획을 세우는데 기초가 될 수 있다.

본 연구에서는 네 개의 모형을 설정하였으며, 각 모형에 대한 예들을 학생들의 검사지를 이용하여 다음과 같이 제시한다.

1. 기술적 오류

이 모형은 문제에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류를 말하며, 다음과 같이 세분하였다.

1-1. 문제의 풀이 과정에서 분모, 분자를 한 문자로 나눌 때, 근호 안과 밖을 똑같이 나누는 오류

<예> 문항1-(4)에서의 문제 풀이

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2-n}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$= 1$$

1-2. 문제 풀이 과정에서 잘못된 계산으로 발생하는 오류

<예> 문항4-(1)에서의 문제 풀이

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{x}+(x-1)}{(x-1)} \qquad (☆)$$

$$= \lim_{x\to1}\sqrt{x}$$

$$= 1$$

2. 논리적으로 부당한 추론

이 모형의 오류는 현 단계에서 다음 단계로 넘어가는 과정에서 논리적으로 적당치 못한 추론 즉 주어진 정보로부터 잘못 유도된 새로운 정보에 관한 오류를 말하며, 다음과 같이 세분하였다.

2-1. 잘못된 연산에 의한 추론

<예> 문항2에서의 문제 풀이

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots$

1

0

1 (☆)

0

1 ⋯ : 발산

2-2. **잘못된 정의에 의한 추론**

<**예**> **문항** 5**에서의 문제 풀이**

(1) $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$

(2) $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1$ ↓ (☆)

(3) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1, 2$

2-3. **잘못된 개념에 의한 추론**

<**예**1> **문항** 1-(1)**에서의 문제 풀이**

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$ **에서** $\lim_{n \to \infty} n = \infty$

$\lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$

따라서, $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(n+1)} = \frac{\infty}{\infty}$

$= 1$ ↓ (☆)

<**예**2> **문항** 1-(3)**에서의 문제 풀이**

$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= (\infty + 1) - \infty$ ↓ (☆)

$= \infty - \infty$

$= 0$

3.잘못 사용된 정의 및 정리

이 모형의 오류는 특별한 원리, 정리와 정의에 대한 왜곡을 다루는 오류를 포함하며, 다음과 같이 세분하였다.

3-1. 무한 급수의 합을 갖기 위한 조건이 잘못 사용된 오류

<예> 문항 3에서의 문제 풀이

$r = -\frac{3}{4}x$ 이므로

$0 \le -\frac{3}{4}x < 1$

$-\frac{4}{3} < x \le 0$ (☆)

3-2. 함수의 극한의 정의가 잘못 사용된 오류

<예> 문항 7에서의 문제 풀이

$f(0) \ne \lim_{x \to 0} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다. (☆)

4. 애매한 오류

이 모형의 오류의 주요 특징은 학생들에 의해서 수행된 과정은 옳지만, 문제에 대한 해가 아닐 경우와 해석 불가능한 해를 포함하며, 다음과 같이 세분하였다.

4-1. 문제에 대한 해법이 아닌 잘못된 오류

<예> 문항 2에서의 문제 풀이

$a = 1, r = -1$ 이므로, $S = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ (☆)

따라서, 수렴.

4-2. 해석 불가능한 해(엉뚱한 해)

<예> 문항 5에서의 문제 풀이

5-(1) $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$

5-(2) $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1$ (☆)

5-(3) $\lim_{x \to 1} f(x) =$ $1 \le f(x) < 2$

B. 결 과

1. 연구 문제 1

연구 문제 1 : 수열의 극한, 함수의 극한, 연속 함수의 정의에 대하여 학생들이 어떠한 오개념을 가지고 있는가?

연구 문제 1에서는 연구의 결과를 세 부분으로 나누어 제시하고자 한다.

(1) 문항 10-(1) : 수열의 극한(또는 극한값)의 정의에 대한 결과

이 문항은 학생들이 수열의 극한에 대한 정의를 얼마나 알고 있는가를 알아보고, 검사지를 통해서 학생들이 수열의 극한에 대한 오개념을 알아보고자 한다.

<표 Ⅳ-1> 수열의 극한에 대한 빈도표

인원(명)	정답(%)	오답(%)	무응답(%)
96	12.50	29.17	58.33

<표 Ⅳ-1>에서 보는 바와 같이, 수열의 극한에 대한 학생들의 정답율은

12.50%, 오답율 29.17%, 무응답율 58.33%로 87.50%의 학생들이 수열의 극한에 대한 정의를 정확히 알지 못하고 있는 것으로 나타났다.

수열의 극한에 대한 학생들의 오개념은 다음과 같다 :

· 수열을 계산함에 따라 가장 가까이 접근하는 값
· 수열의 항이 무한대로 나가는 것
· 일정한 수열에서 한계를 벗어난 최고치의 알 수 없는 값
· 마지막에 오는 값
· 0 은 아니지만 0 에 가장 가까운 수
· 수들이 계속해서 커지거나, 작아져서 어떠한 수에 가까워지지만 결코 같아질 수 없는 것
· 수가 만날 수 없는 어떤 값을 향해 계속 다가가는 것

(2) 문항 10-(2) : 함수의 극한(또는 극한값)의 정의에 대한 결과

이 문항은 학생들이 함수의 극한에 대한 정의를 얼마나 알고 있는지를 알아보고, 검사지를 통해서 학생들이 함수의 극한에 대한 오개념을 알아보고자 한다.

<표 Ⅳ-2> 함수의 극한에 대한 빈도표

인원(명)	정답(%)	오답(%)	무응답(%)
96	13.54	23.96	62.50

<표 Ⅳ-2>에서 보는 바와 같이, 학생들의 함수의 극한에 대한 정답율은 13.54%, 오답율23.96%, 무응답율은 62.50%로 86.46% 학생들이 함수의 극한에 대한 정의를 정확히 알지 못하고 있는 것으로 나타났다.

함수의 극한에 대한 학생들의 오개념은 다음과 같다 :

- x 가 무한대로 증가할 때의 y 값
- 임의의 x 값이 n의 값으로 가기 직전의 $f(x)$의 값
- $f(x)$ 가 어떤 일정한 수 α로 다가가지만 그 수와 같지는 않다.
- 치역
- 그래프에서 한계치를 벗어난 최고치의 알 수 없는 값
- x의 어떤 한 점에 대응하는 y 값에 가까워지는 값
- 함수값이 팽창하는(커가는, 작아지는) 상태

(3) 문항 10-(3) : 연속 함수의 정의에 대한 결과

이 문항은 학생들이 연속 함수의 정의를 얼마나 알고 있는가를 알아보고, 검사지를 통해서 학생들이 함수의 연속에 대한 오개념을 알아보고자 한다.

<표 Ⅳ-3> 함수의 연속에 대한 반응 빈도표

인원(명)	정답(%)	오답(%)	무응답(%)
96	23.96	16.67	59.37

<표 Ⅳ-3>에서 보는 바와 같이, 학생들의 연속 함수에 대한 정답율은 23.96%, 오답율은 16.67%, 무응답율은 59.37%로 함수의 연속에 대하여 76.04%의 학생들이 함수의 연속의 정의에 대하여 정확히 알지 못하고 있는 것으로 나타났다.

함수의 연속에 대한 학생들의 오개념은 다음과 같다 :

- $x = a$ 일 때만 제외하고, $y = f(x)$의 그래프는 이어지는 그래프
- 함수값과 극한값은 같다.
- 그래프는 한 개의 모양으로 나타나야 한다.

2. 연구 문제 2

연구 문제 2 : 극한에 관한 문제 풀이 과정에서 학생들이 어떠한 오류 유형을 나타내는가?

학생들의 오류 분석은 1 9번의 문항에서 96명이 답한 문제 풀이 과정을 통해서 완전한 답을 제시한 문항과 무응답한 문항 그리고 풀이 과정에서 끝까지 풀지 못하고 중간에 그만 두었거나 답만을 제시한 문항을 제외하고 504개의 오류를 찾아내어 분석을 실시하였다.

<표 Ⅳ-4> 모형별 오류 빈도표

오류모형	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	계
개수	55 10.91	141 27.98	276 54.79	32 6.35	504

<표 Ⅳ-4>는 문항 1 9에 대한 오류 모형의 빈도표이다. 표에서 보는 바와 같이 모형C, 즉 잘못 사용된 정의 및 정리에 관한 오류가 전체의 54.79%로 가장 많았다. 다음으로 모형B, 즉 논리적으로 부당한 추론에 관한 오류가 27.98%로 많은 것으로 나타났다. 또한 모형A, 즉 기술 오류 모형은 10.91%과 모형D, 즉 애매한 오류가 6.35%로 나타났다.

오류 모형을 각 문항에 따라 분류하여 다음과 같이 일곱 가지로 세분하였다.

가. 문항 1 : 수열에 대한 계산 문제

<표 Ⅳ-5> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율 (%)	오류 A	오류 B	오류 C	오류 D	오류 개수
1-(1)	76.04	3	9	1	0	13
(2)	66.67	1	15	5	2	23
(3)	62.50	11	17	4	0	32
(4)	52.08	26	12	0	1	39
계		41	53	10	3	107
(%)		38.32	49.52	9.35	2.80	

<표 Ⅳ-5>에서 보는 바와 같이, 문항1 에 대한 정답율은 1-(1)은 76.04%, 1-(2)는 66.67%, 1-(3)은 62.50%, 그리고 1-(4)는 52.08%로 나타났다. 오류는 B모형의 오류가 가장 많은 49.52%가 발생하였고, 다음으로 A모형의 오류가 38.32% 발생하였다. 이어서 C모형과 D모형이 각각 9.35%, 2.80%로 나타났다.

(2) 문항 2 : 무한 급수의 합에 관한 문제

<표 Ⅳ-6> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율(%)	오류 A (%)	오류 B (%)	오류 C (%)	오류 D (%)	오류 개수
2	60.42	0	5	18	2	25
		0	20.0	72.0	8.0	

<표 Ⅳ-6>에서 보는 바와 같이, 문항2에 대한 정답율은 60.42%로 나타났다. 오류는 C모형이 72.0%로 가장 많이 발생하였으며, B모형, D모형이 각각 20.0%, 8.0%로 나타났다.

(3) 문항 3 : 무한 등비 급수의 수렴 조건에 대한 문제

<표 Ⅳ-7> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율(%)	오류 A (%)	오류 B (%)	오류 C (%)	오류 D (%)	오류 개수
3	36.43	4	0	22	4	30
		13.33	0	73.33	13.33	

<표 Ⅳ-7>에서 보는 바와 같이, 문항 3에 대한 정답율은 36.43%로 나타났다. 오류는 C모형의 오류가 가장 많은 73.33%, 이어서 A, D모형이 같은 13.33%로 나타났다.

(4) 문항 4 : 함수의 극한에 대한 계산 문제

<표 Ⅳ-8> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율(%)	오류 A (%)	오류 B (%)	오류 C (%)	오류 D (%)	오류 개수
4-(1)	65.63	7	8	4	2	21
		33.33	38.10	19.05	9.52	
(2)	47.92	1	8	1	1	11
		9.10	72.73	9.10	9.10	

<표 Ⅳ-8>에서 보는 바와 같이, 문항 4-(1)에 대한 정답율은 4-(1)은 65.63%로 나타났다. 오류는 B모형과 A모형의 오류가 각각 38.10%, 33.33%로 많이 발생하였다. 그리고 C, D 모형의 오류는 각각 19.05, 9.52%로 나타났다.

문항 4-(2)에 대한 정답율은 47.92%로 나타났다. 오류는 B모형이 72.73%로 가장 많이 나타났다. 이어서 A, C, D모형이 똑같이 9.10%로 나타났다.

(5) 문항 5, 6 : 함수의 극한에 대한 문제

<표 Ⅳ-9> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율(%)	오류 A (%)	오류 B (%)	오류 C (%)	오류 D (%)	오류 개수
5-(1)	40.63	0	2	37	1	40
		0	5.0	92.5	2.5	
(2)	56.25	0	2	23	0	25
		0	8	92	0	
(3)	33.33	1	27	9	4	41
		2.43	65.85	21.95	9.76	
6-(1)	26.04	0	2	36	3	41
		0	4.88	87.80	7.34	
(2)	32.29	0	1	31	2	34
		0	2.94	91.18	5.88	
(3)	26.04	0	26	6	1	33
		0	78.79	18.18	3.03	

<표 Ⅳ-9>에서 보는 바와 같이, 문항 5에 대한 정답율은 5-(1)은 40.63%, 5-(2)는 56.25%, 5-(3)은 33.33%로 나타났다. 5-(1)에 대한 오류는 C모형과 B모형이 각각 92.5%, 5.0%로 나타났다. 5-(2)에 대한 오류는 C모형과 B모형이 각각 92.0%, 8.0%로 나타났다. 5-(3)에 대한 오류는 B모형과 C모형이 각각 65.85%, 21.95%로 나타났다.

문항 6에 대한 정답율은 6-(1)은 26.04%, 6-(2)는 32.29%, 6-(3)은 26.04%로 나타났다. 6-(1)에 대한 오류는 C모형과 D모형이 각각 87.80%, 7.34%로 나타났다. 6-(2)에 대한 오류는 C모형과 D모형이 각각 91.18%, 5.88%로 나타났다. 6-(3)에 대한 오류는 B모형과 C모형이 각각 78.79%, 18.18%로 나타났다.

(6) 문항 7 : 함수값과 극한값에 대한 문제

<표 Ⅳ-10> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율(%)	오류 A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	오류 개수
7	39.58	0	1	28	5	34
		0	2.94	82.35	14.71	

<표 Ⅳ-10>에서 보는 바와 같이, 문항 7에 대한 정답율은 39.58로 나타났다. 오류는 C모형이 압도적으로 많은 82.35%가 발생하였으며, D모형 14.71%, B모형 2.94%로 나타났다.

(7) 문항 8, 9 : 함수의 연속에 관한 문제

<표 Ⅳ-11> 문항별 정답율 및 오류 빈도표

문항	정답율(%)	오류 A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	오류 개수
8-(1)	58.33	0	1	19	2	22
		0	4.54	86.36	9.09	
(2)	79.17	0	0	6	1	7
		0	0	85.71	14.29	
9-(1)	83.33	1	1	2	0	4
		25.0	25.0	50.0	0	
(2)	37.50	0	4	24	1	29
		0	13.79	82.76	3.45	

<표 Ⅳ-11>에서 보는 바와 같이, 문항 8-(1)의 정답율은 58.33%, 8-(2)의

정답율은 79.17%로 나타났다. 8-(1)에 대한 오류는 C모형과 D모형이 각각 86.36%, 9.09%로 나타났다. 8-(2)에 대한 오류는 C모형과 D모형이 각각 85.71%, 14.29%로 나타났다.

문항 9-(1)의 정답율은 83.33%, 9-(2)의 정답율은 37.50%로 나타났다. 9-(1)에 대한 오류는 C모형이 50.0%로 나타났다. 9-(2)에 대한 오류는 C모형과 B모형이 각각 82.76%, 13.79%로 나타났다. 문항 8,9에 대한 오류는 C형이 압도적으로 많이 나타났다.

C. 논 의

본 연구의 연구 문제를 바탕으로 연구 결과를 논의하면 다음과 같다.

1. 연구 문제 1

극한에 대한 오개념을 (1)수열의 극한에 대한 오개념, (2)함수의 극한에 대한 오개념, (3)연속 함수의 정의에 대한 오개념의 세 가지로 나누어 알아보았다.

첫째, 수열의 극한에 대한 정의를 정확히 알고 있는 학생은 전체의 12.50%에 불과하며, 29.17%의 학생들은 정의와 다른 오개념을 가지고 있었고, 58.33%의 학생들이 전혀 대답하지 못했다. 교과서에서 제시된 수열의 극한은 '무한 수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다라고 하고, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 한다'라고 정의하였다. 학생들의 수열의 극한에 대한 오개념은 길게 제시된 극한의 정의의 일부분의 성질을 극한의 정의로 생각하는 학생들이 많았다. 예로써, '항의 번호 n 이 한없이 커진

다’는 것을 극한으로 생각하여, 극한을

· 수열의 항이 무한대로 나가는 것

· 일정한 수열에서 한계를 벗어난 최고치의 알 수 없는 값

· 무한에서의 마지막 값

으로 생각하며

‘α에 한없이 가까워지면’ 에 관련된 오개념은

· 수열을 계산함에 따라 가장 가까이 접근하는 값

· 목표를 향해 아주 가까이 다가간 상태

· 수들이 계속 커지거나 작아져서, 어떤 한 수에 가까워지지만 결코 같아질 수는 없는 것

· 만날 수 없는 어떤 값을 향해서 계속 다가가는 것

· 어떤 수에 가까워지는 것

등이 있었다.

그러므로 수열의 극한을 지도하는데 절차에만 치중하면 이에 따른 학생들의 개념 이미지가 다양함을 인식해야 할 것이다. 일반항이 상수로 표시되는 수열에 대한 지도가 필요하고, 교과서에 제시된 수열의 정의를 하나의 묶음으로 이해할 수 있도록 각각의 개념의 연결성을 강조하고 다양한 예를 제시하여야 할 것으로 생각된다.

둘째, 함수의 극한에 대한 정의를 정확히 알고 있는 학생은 전체의 13.54%에 불과하며, 23.96% 학생들이 함수의 극한에 대한 정의에 대하여 오개념을 가지고 있으며, 62.50%의 학생들은 전혀 대답하지 못했다. 교과서에 제시된 함수의 극한은 ‘함수 $f(x)$에서 x가 a와 같지 않으면서, a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 유한한 값 α에 한없이 가까워지면, 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다라고 하고, α를 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 한다’고 정의하였다. 학생들은 함수의 극한에 대한 정의에서 ‘극한’, ‘가까이 간다’등과 관련된 오개념은

다음과 같다 :

· 함수의 값이 무한대로 나가는 것
· x가 무한대로 증가할 때의 y값
· x의 어떤 한 점에 대응하는 y값에 가까이 가는 값
· 함수값이 팽창하는(커져가는 혹은 작아지는) 상태
· 어떤 일정한 수 α에 다가가지만, 그 수와 같지는 않다

학생들은 극한에 대한 정의를 완전하게 이해하지 못한 상태에서 무한대와 무한소의 개념을 학습함으로써, 극한, 무한대와 무한소의 개념을 혼동하고 있는 것으로 나타났다. 이러한 이유로 학생들은 함수의 극한에 대한 오개념을 갖게 된다. x값이 a로 가까이 감에 따라 $f(x)$의 값도 α로 가까이 간다는 것을 동시에 제시하여 x와 $f(x)$중에 하나만이 어떠한 점에 가까이 가는 것이 아니라. x와 $f(x)$가 각각 동시에 a와 α로 가까이 간다는 것을 강조할 필요가 있다. 더불어 함수값과 극한값에 대한 설명으로 함수값과 극한값은 다를 수도 있으며, 함수값은 존재하지 않아도 극한값은 존재할 수 있는 예들을 그래프와 함께 설명할 필요가 있다.

셋째, 연속 함수의 정의에 대하여 정확히 알고 있는 학생들은 23.96%에 불과하며, 16.67%의 학생들이 연속 함수에 대하여 오개념을 가지고 있었으며, 59.37%의 학생들이 전혀 대답을 하지 못했다. 교과서에 제시된 '함수 $f(x)$의 $x = a$에서 연속의 정의는

(ⅰ) $x = a$에서 정의되고

(ⅱ) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하고

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 이면

이 함수는 $x = a$에서 연속이다'라고 한다.

그런데 많은 학생들이 위의 성질 ⅰ), ⅱ), ⅲ)을 별개의 것으로 생각하는

경우가 많았다. 그러므로, ⅰ), ⅱ), ⅲ)의 성질이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되기 위한 필요충분조건임을 강조해야할 것이다. 또한 ⅰ), ⅱ), ⅲ)성질 중 두 개 또는 하나를 만족시키지 못해서 불연속인 함수의 다양한 예들을 제시할 필요가 있다.

학생들이 극한 개념을 잘 이해하기 위해서는 높은 수준의 사고가 요구된다. 그러나 학생들은 극한, 무한대와 무한소의 개념에 대하여 익숙치 못하고, 이러한 개념들이 복잡하고 어렵기 때문에 이것들의 상호 관계성이 확실치 않은 상태에서 극한의 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 교과서에서도 주로 극한 개념에 대한 이해에 관한 문제보다는 극한값을 구하는 과정에 중점을 둔 문제들에 많이 제시되어 있는 것도 학생들의 극한 개념에 대한 이해가 부족한 원인중의 하나가 될 것이다. 또한 '한없이 가까이 간다'와 '한없이 커진다'는 것을 이해하기 위해 다양한 그래프의 예가 필요할 것으로 생각된다. Schoonover, M., & Peterson, C. (1993)도 미적분의 개혁에서 문제를 푸는 조작적 기술보다는 개념을 강조해야 한다고 주장하고 있다. 교사들도 수학 교육에서 중요한 수학적 개념에 대한 정의를 중시하고, 학생들에게도 수학적 개념의 중요성을 인식시키는 것이 중요하다고 생각된다.

2. 연구 문제 2

극한에 관한 문제 해결 풀이 과정에서 학생들이 범하는 오류를 조사한 결과는 C모형인 잘못 사용된 정의 및 개념에 관한 오류가 가장 많은 54.76%로 나타났다. 이것으로부터 학생들이 극한에 대한 개념을 잘 이해하지 못하고 있다고 볼 수 있다. 이것은 김 옥경(1990)의 '고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구'의 결과와 일치하는 것으로 나타났다. B모형, 즉 논리적으로 부적당한 추론에 관한 오류가 27.98%로 나타났다. 학생들은 문

항 5.6에서 좌극한, 우극한 그리고 극한에 대한 통합적인 지식의 연결이 부족한데서 주로 발생한 오류 때문인 것으로 생각된다. 모형A 즉, 기술 오류 모형은 10.91%로 문제 풀이 과정중 연산과 계산에서 부주의한 탓으로 원하는 답을 제시하지 못한 학생들이 많았다. 위와 같은 사실을 기초로 문항 1 9에 대하여 자세히 분석하고자 한다.

문항 1 : 수열에 대한 계산 문제

문항 1의 각각의 문제에 대한 정답율은 평균 64.32%로 수열에 대한 계산 문제는 비교적 잘 푸는 것으로 나타났다. 하지만, 계산 과정의 현 단계에서 다음 단계로 넘어가는 과정에서 논리적으로 부당한 추론에 의한 오류가 49.52%로 높게 나타났으며, 기술 오류(연산오류, 계산오류)도 38.32%로 나타났다. 학생들은 문제 풀이 과정에서 무한에 대한 개념이 부족하여 부정형의 계산 문제에서, 무한에서 적용할 수 없는 규칙들을 일상적으로 적용했던 방법과 똑같이 적용하므로써 오류를 많이 범했다. 그리고, 근호에 대한 개념의 부족으로 인하여 분모, 분자를 한 문자로 나눌 때, 근호 안과 밖을 똑같이 나누는 오류와 분모, 분자를 똑같이 나누지 않고, 분모 분자 중에서 한 쪽만을 나누는 경우도 많았다. 학생들이 계산 과정에서 기본적인 연산에 주의를 집중하여 문제를 해결한다면 상당한 오류를 줄 일수 있을 것이다.

문항 2 : 무한 급수의 합에 관한 문제

문항 2에 대한 정답율은 60.42%로 나타났지만, 풀이 과정이 생략되었거나 답만을 제시한 학생들이 많았다. 잘못된 정리 및 정의에 의한 오류가 72.0%로 높게 나타났다. 학생들은 문항 2를 다음과 같은 틀린 방법중의 하나로 계산하는 경우가 있었다 :

(1) $S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

$$= 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots$$

$$= 0$$

(2) $S = 1-(1-1+1-1+\cdots)$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

(3) $S = 1-(1-1+1-1+\cdots)$

$$= 1- S$$

$$2S = 1$$

$$S = 1/2$$

학생들은 수렴하는 수열을 많이 다루기 때문에 문항 2도 무한 급수가 수렴하기 위한 조건을 생각하지 않고, 무한 급수의 합의 공식을 적용하여 급수의 합을 구하는 경우가 많이 나타났다. 또한 연산 과정에서 유한 개의 계산의 경우와 마찬가지로 계산해서는 안된다는 점을 주의하도록 무한 급수의 합의 성질에 관한 지도가 필요하다고 생각된다.

문항 3 : 무한 등비 급수의 수렴 조건에 관한 문제

문항 3에 대한 정답율은 36.43%로 낮게 나타났다. 문항 3에 대한 오류도 C 모형의 오류가 73.33%로 가장 많이 발생하였다. 오류를 범한 대부분의 학생들은 무한 등비 급수의 수렴 조건에 대하여 학생들이 정확히 모르고 문제를 풀었기 때문인 것으로 생각된다. 특히 무한 등비 급수의 수렴 조건에 1과 -1을 포함시키고 있는 학생들이 있었다.

문항 4 : 함수의 극한에 대한 계산 문제

<표 Ⅳ-8>에서 보는 바와 같이, 문항 4에 대한 정답율은 평균 56.78%로 나타났다. 문항 4-(1)에 대한 오류는 계산 과정에서 논리적으로 부당한 추론과

기술 오류가 각각 38.10%, 33.33%로 , 학생들이 계산 과정에서 극한이 0/0꼴의 과정에서 0 으로 추론하는 학생들이 있었고, 근호 안을 x로 나눌 때, 근호 안과 밖을 똑같이 나누는 오류를 많이 나타냈다. 문항 4-(2)는 극한의 곱에 관한 문제인데 극한의 기본 성질의 적용에 의한 계산을 제시하지 못하고, 중간에 포기한 학생과 답만을 제시한 학생이 많이 나타났다. 학생0들은 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 을 $-1/x \leq \sin \leq 1/x$ 로 계산하는 경우가 많았다. 이것은 삼각 함수에 대한 개념이 확실하지 않은 것으로 이에 대한 지도도 있어야 할 것이다.

문항 5, 6 : 함수의 극한에 대한 문제

<표 Ⅳ-9>에서 보는 바와 같이, 문항 5,6에 대한 정답율은 평균이 각각 43.40%, 28.12%로 낮게 나타났다. 문항 5, 6 에 대한 오류는 C모형이 압도적으로 많았고, 다음으로 B모형이 많이 발생했다. 문항 5에서 학생들은 극한값과 함수값의 개념이 확실치 않아서 $x=1$에서 우극한이 존재하지 않는다고 답한 학생들도 있었다. 일부의 학생들은 좌극한, 우극한 모두를 극한값으로 생각하여, $x=1$에서의 극한값을 두 개로 제시한 경우도 있었다. 문항 6에서 많은 학생들이 좌극한, 우극한과 극한에 대하여 정답율이 매우 낮게 나타났다. $x=\pi/2$에서의 좌극한이 $+\infty$이고, 우극한이 $-\infty$이며, 따라서 극한값이 존재하지 않은다는 것을 이해하지 못하고, 좌극한, 우극한 값은 항상 어떠한 정해진 값이어야만 한다고 생각하는 학생들이 있었다. 이처럼 학생들이 좌극한, 우극한과 극한의 정의를 이해하지 못한 것으로 나타났다. 함수의 극한에서 좌극한과 우극한에 대한 개념, 그리고 좌극한과 우극한이 일치해야만 극한값이 존재한다는 것을 여러 유형의 예와 그래프를 통하여 지도해야할 것으로 생각된다.

문항 7 : 함수값과 극한값에 대한 문제

<표 Ⅳ-10>에서 보는 바와 같이, 문항 7에 대한 정답율은 39.58%로 낮게 나타났다. 문항에 대한 오류는 C모형이 82.35%로 많이 발생했다. 이것은 학생들이 함수값과 극한값에 대한 개념이 부족하다는 것을 보여주고 있다. $x=0$에서의 함수값은 0 이고, $x=0$에서 함수가 연속이 아니기 때문에 극한값이 존재하지 않는다고 생각하는 학생들이 있었다. $x=0$에서의 극한값을 $x=0$에서의 함수값으로 답한 학생들도 많았다. 일부의 학생들은 좌극한, 우극한값이 2 로 가까이 가지만 $x=0$에서의 함수값이 0 이기 때문에 극한값은 존재하지 않는다고 답했다. 그러므로 학생들에게 함수값은 존재하지 않아도 극한값이 존재할 수 있다는 것을 예를 통하여 지도하고, 함수값과 극한값의 개념을 비교하여 가르쳐야할 것으로 생각된다.

문항 8, 9 : 함수의 연속에 관한 문제

<표 Ⅳ-11>에서 보는 바와 같이, 문항 8,9에 대한 정답율의 평균은 각각 68.76%, 60.42%로 나타났다. 문항 8에서 그래프로 제시된 함수의 연속에 대한 문제는 정답율이 높게 나타났지만, 일부의 학생들은 $f(x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$에서 $x=0,\ y=0$에서 그래프가 이어지지 않았기 때문에 불연속이라고 답한 학생들이 있었다. 문항 9-(1)에서의 정답율이 83.33%로 높게 나타났지만, 이어지는 9-(2)의 정답율은 35.70%로 낮게 나타났다. 학생들은 극한의 계산 문제는 비교적 잘 해결하지만 개념의 정의에 관한 문제는 잘 해결하지 못하는 것을 보여준다. 학생들은 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 정의될 수 없다고 생각하기 보다는 $x=1$에서의 극한값이 문항 9-(1)에 계산된 값이 2 이기 때문에 $x=1$에서도 연속이라고 생각하여, 함수 $f(x)$가 연속이라고 답한 학생들이 많았다. 그래프로 제시되지 않은 9-(2)는 정답율이 35.70%로 그래프로 제시된 문항과

큰 차이를 보여주었다. 이것은 학생들이 함수의 연속에 대한 개념이 부족하기 때문인 것으로 생각된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

A. 결 론

본 연구의 목적은 고등학교 2학년 학생들이 극한에 대하여 가지고 있는 오개념과 극한에 관한 문제를 푸는 과정에서 나타나는 오류의 모형을 조사하여 분석하고자 하였다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 두 가지 연구 문제를 설정하였다 : (1) 수열의 극한, 함수의 극한, 연속 함수의 정의에 대하여 학생들이 어떠한 오개념을 가지고 있는가? (2) 극한에 관한 문제 풀이 과정에서 학생들이 어떠한 오류 형태를 나타내는가?

본 연구를 수행하기 위하여 대전광역시에 소재하고 있는 여자 고등학교 중에서 일 개교를 선정하여, 2학년 2개 반 96명을 연구 대상으로 선정하였다.

검사 도구는 본 연구자가 고등학교 교과서의 난이도 수준으로 개발한 후 현장 교사들과 협의하여 수정·보완한 검사지이다. 검사지는 10개의 문항으로 구성되었으며, 검사지의 10번 문항을 통해서 학생들의 오개념을 조사하였고, 문항 1 9번을 학생들이 제시한 문제 풀이 과정을 통해서 극한에 대한 오류를 네 가지 모형(기술 오류, 논리적으로 부당한 추론, 잘못 사용된 정의 및 정리, 애매한 오류)으로 분류하였으며, 각 문항에 대한 정답율을 백분율로 나타내었다.

본 연구의 결과로써 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 대부분의 학생들은 극한의 정의와 연속 함수의 정의를 정확히 이해하지 못하고 있었다. 어떤 학생들은 극한에 대하여 잘못된 개념을 가지

고 있었다. 이것은 극한의 교수 과정에서 극한의 개념에 대한 지도를 더 강조하고 극한의 다양한 예를 제시하여야 할 것으로 생각된다.

둘째, 학생들은 문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산에서 오류를 범하고, 현 단계에서 다음 단계로 넘어가는 과정에서 논리적으로 적절치 못한 추론을 하며, 문제에서 정의 및 정리를 잘못 사용하므로써 오류를 범하는 것으로 나타났다. 따라서 학생들은 문제 해결 과정에서 기본적인 연산 과정에 주의가 필요한 것으로 나타났다. 극한의 개념이나 성질을 잘 이용하고 이를 활용하여 문제를 해결하므로써, 논리적으로 부당한 추론을 하거나 특별한 정의와 정리를 잘못 적용하지 않도록 지도해야 하겠다.

B. 제 언

학생들이 새로운 개념을 배우고 그 개념에 관계된 문제를 푸는 과정에 대한 체계적인 분석과 연구가 필요하다고 생각한다. 학생들의 사고 과정을 이해하고 그들의 지식 체계에 효과적인 교수법을 연구하려는 연구자들을 위해서 본 연구에서 얻은 결과를 기초로 후속 연구를 위한 다음과 같은 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서 극한의 개념에 대하여 많은 학생들이 정확히 알지 못하는 것으로 나타났다. 그러므로 극한의 개념을 잘 이해시킬 수 있는 수업방법에 대한 연구가 필요하다고 생각된다.

둘째, 본 연구에서는 극한 단원을 중심으로 학생들의 오개념 및 오류를 분석하였는데 다른 분야에 대해서도 연구가 필요하다고 생각된다.

셋째, 학생들은 문제 풀이 과정에서 많은 오류를 범한다. 이 오류들의 원인을 정확히 진단하여 예방 및 지도하기 위한 체계적인 연구가 필요할

것으로 생각한다.

넷째, 많은 학생들이 문제를 풀지 않은 경우가 많았는데, 그것에 대한 정확한 원인에 대한 연구가 필요하다고 생각된다.

참 고 문 헌

김수미(1994). 수학적 오개념의 자각과 존중- Fischbein의 메타인지 전략을 통하여-. *대한수학교육학회 논문집*, 제4권 제2호. pp. 173-188.

김옥경(1990). *고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구*. 이화여자대학교교육대학원 석사학위논문.

류성림(1993). *중학생의 기하 증명 능력과 오류에 관한 연구*. 한국교원대학교 석사학위논문.

박한식, 우정호(1990). *수학 Ⅰ*. 지학사.

신인숙(1996). *중학생의 함수에 관한 오개념과 오류에 관한 연구*. 한국교원대학교 석사학위논문.

이상원(1993). *고등학교 학생의 대수 문제 해결: 전략과 오류 분석*. 한국교원대학교 석사학위논문.

이정선(1995). *극한 개념의 효율적 지도 방법에 대한 연구- 고등학교 교육과정을 중심으로-*. 한양대학교교육대학원 석사학위논문.

이희승(1981). *국어 대사전*. 서울: 민중서림.

Anderson, J. R.(1985). *Cognitive psychology and its implications*(2nd ed.). New York : W. H. Freeman and company.

Arends, R.I.(1991). *Learning to teach(2nd ed.)*. New York : McGraw-Hill, Inc..

Babbit, B. C.(1990). *Error pattern in problem solving*. Paper presented at the International Conference of the Council for Learning Disabilities. ED 338 500. pp. 1-11.

Burn, R.P.(1993). Individual development and historical development: a study of calculus. *INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL.* vol.

24, No. 3, 429-433.

Carpenter, T.P.(1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. In J.Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge* : The case of Mathematics(pp. 113-132). London : Lawrence Erlbaum Associate, Inc..

Cornu, B.(1991). Limits. In D. Tall(ed.), *Advanced Mathematical Thinking*(pp. 153-165). Dordrecht, Netherland : Kluwer.

Courant, R., & Robbins, H.(1978). *What is mathematics? Functions and Limits*. Oxford : Oxford university press.

DeVincenzo-Gavioli, M. A.(1983). Diagnosing student error patterns. In G. Shufelt, R. James, & Smart(Eds.). *The agenda in action*. National Council of Teachers of Mathematics, inc..

Ferini-Mundy, J., & Gaudard, M.(1992). Secondary school calculus : Preparation or pitfall in the study of college calculus? *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 23, No. 1, pp. 56-71.

Ferini-Mundy, J., & Gaudard, K. G.(1991). An overview of the calculus curriculum reform effort : Issues for learning, teaching, and curriculum development. *American Mathematics Monthly*. 98(7), 627-635.

Ferni-Bundy, J., & Lauren, D.(1993). Teaching and learning calculus. In P. S. Wilson(Ed.), *Research ideas for the classroom : High school-Mathematics*(pp. 155-176). New York : Macmillan publishing co..

Fischbein, E.(1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R.

Bielefeld, R.W. Scholz, R. Strâsser, & B. Winkelmann(Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*(pp. 231-245). Germany : University of Bielefed.

Kirby, W.N.(1992). *Guidelines for teaching calculus*. Texas Education Agency. ED 349 179.

Movshovitz-Hadar, N., Oritz, Z., & Shlomo, I.(1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 18, No. 1, 3-14.

Nagy, P., Traub, R.E., Macrury, K., & Klaiman, R.(1991). High school calculus : Comparing the content of assignments and tests. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, No. 1, 69-75.

Radatz, H.(1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 10. 163-172.

Schoonover, M., & Peterson, J.C.(1993). *Calculus reform : Expression of a two-year college collaborating with universities*. ED. 368-413. pp. 1-15.

Thipking, S., & Davis, E.J.(1991). Preservice elementary teachers' misconceptions in interpreting and applying decimals. *School Science and Mathematics*. Vol. 91(3), 93-99.

Tirosh, D.(1991). The role of students' intuition of infinity in teaching the cantorian theory. In D. Tall(ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 199-214). Dordrecht, Netherlands : Kluwer.

Tirosh, D., & Graeber, A.O.(1991). The effect of problem type and common misconception on preservice elementary teacher's thinking about division. *School Science and Mathematics*. Vol. 91(4), 157-163.

Williams, S. T.(1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 22, No. 3, 219-236.

개념 검사지

본 검사는 여러분이 극한에 대하여 어느 정도 이해하고 있는지를 알아보기 위한 것으로서, 검사의 결과는 공개되지 않으며, 단지 수학교육 개선을 위한 연구의 목적에 사용할 뿐입니다. 문제를 잘 읽고 최선을 다하여 풀어주기 바랍니다. 답은 직접 문제지에 적어 넣기 바랍니다. 감사합니다. 한국교원대학교 대학원 수학교육과 (　　)고등학교　　(　)학년 (　)반　　이름 (　　　　　　)

1. **다음 극한값을 구하여라.**

(1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(2) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

(3) $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n})$

2. ***다음 무한 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.***

$$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

3. ***다음 무한 급수가 합을 갖도록 x의 범위를 정하여라.***

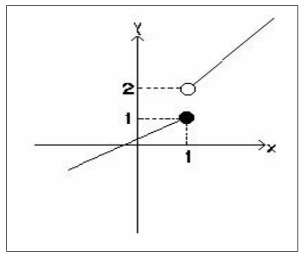
$$1-\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}x^2-\frac{27}{64}x^3+\cdots$$

4. **다음 극한값을 구하여라.**

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(2) $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$

5. **오른쪽 그림은 함수** $f:R\to R$ **의 그래프이다.**
다음 물음에 답하여라.

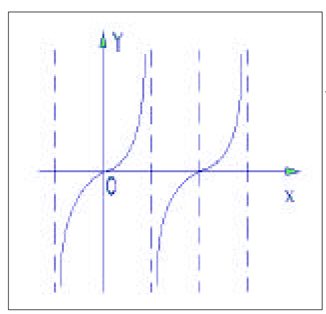


(1) $\lim_{x\to 1+0} f(x) =$

(2) $\lim_{x\to 1-0} f(x) =$

(3) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

6. **오른쪽 그림은 함수** $f(x)=\tan x$ **의 그래프이다.**
다음 물음에 답하여라.



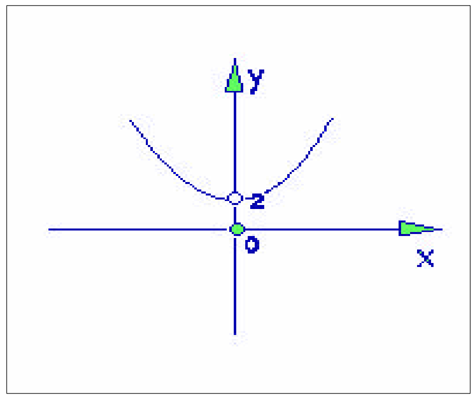
(1) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) =$

(2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) =$

(3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) =$

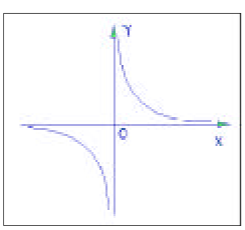
7. **함수** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ **에 있어서**

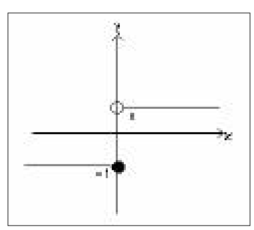
$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$



8. **다음 함수의 연속, 불연속을 판정하여라.**

(1) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ (2) $f(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$





9. **함수** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$**에 대하여**

(1) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

(2) **함수** $f(x)$**의 연속, 불연속을 알아보아라.**

10. (1) **수열에서의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.**

(2) **함수에서의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.**

(3) **함수** $y = f(x)$**의** $x = a$**에서의 연속의 정의를 쓰시오.**

감사의 글

이 작은 결실을 맺기까지 여러 면에서 도와주시고 이끌어주신 많은 분들의 모습이 떠오릅니다.

무엇보다도 학업에 정진할 수 있도록 보살펴주시고 격려해주신 류희찬 교수님에게 감사를 드립니다. 논문지도, 학문적인 지도 뿐만 아니라 삶의 방법까지 가르쳐주신 박한식 교수님, 박배훈 교수님, 전평국 교수님, 정창현 교수님, 신현용 교수님, 김원경 교수님, 이재학 교수님, 신인선 교수님, 이기석 교수님, 조민식 교수님께 감사를 드립니다.

2년간 동고동락하면서 격려해주고 사랑으로 보살펴준 대학원생 모두에게도 고마움을 전합니다. 또한 배움의 기회를 준 충청남도 교육청의 교육감님 이하 모든 분들과 장항공업고등학교의 선생님들에게도 감사의 마음을 전합니다.

바쁜 생활에서도 헌신적인 사랑과 이해로 힘과 용기를 주었던 아내와 건강하게 자라고 있는 보규, 호빈이와 이 기쁨을 함께 하고 싶습니다.

1997년 2월

한 종 희 올림