석사학위 논문

이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구

— 중학교 3학년 함수 단원 중심 —

A Study on the Analysis of Errors on the Graph of Quadratic Function

- on the basis of the function unit of the third year middle school -

한 국 교 원 대 학 교 교 육 대 학 원

수학교육학과 수학교육전공

성 종 기

2000년 2월

석사학위 논문

이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구

— 중학교 3학년 함수 단원 중심 —

A Study on the Analysis of Errors on the Graph of Quadratic Function

- on the basis of the function unit of the third year middle school -

지 도 교 수　　김　원　경

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

한 국 교 원 대 학 교　교 육 대 학 원

수학교육학과 수학교육전공

성　종　기

2000년　2월

목 차

Ⅴ. 결론 및 제언

표 목 차

PROTOCOL 목 차

논 문 요 약

이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구
— 중학교 3학년 함수 단원 중심 —

성 종 기

한국교원대학교 교육대학원 수학교육전공
(지도 교수 : 김 원 경)

본 연구의 주요목적은 중학교 3학년 학생들의 이차함수의 그래프에 있어서 오류 유형을 조사하고 그 원인을 분석하여 개선책을 제시하고자 하였다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 두 가지 문제를 설정하였다. 첫 째 학습능력(상, 중, 하)에 따른 중학교 3학년 학생들의 이차함수의 그래프 영역에서 발생하는 오류유형을 분석한다. 둘 째 각각의 오류 유형에 대한 오류의 원인을 분석하여 그 개선책을 제시한다.

본 연구를 수행하기 위해서 김천시에 소재하는 두 개 중학교를 선정하였으며, 오류 유형 검사를 위하여 1학기말 수학성적을 기초하여 상, 중, 하로 구분하여 총 252명을 연구대상으로 선정하였다. 오류유형 검사지는 중학교 3학년 5종 교과서에서 공통으로 다루어지는 교과서 수준의 난이도로서 만들었다. 검사지는 이차함수의 그래프의 유형별로 4문제씩 총 20문항으로 구성되었으며, 학생들이 제시한 문제 풀이 과정을 통해서 이차함수의 그래프에 대한 오류 유형과 원인을 분석하였다.

오류 모델은 네 가지 모델(문제의 자료를 잘못 사용하는 오류, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 기술적인 오류)으로 분류하였으며, 이차함수의 그래프 유형에 있어 학생들의 학습능력

(상, 중, 하)별로 정답률과 오류를 백분률로 나타내었다.

전체 252명에게 그래프 유형별로 총 20문항을 제시한 결과 완전한 답을 한 학생은 45.9%, 무응답 또는 끝까지 못 풀고 답만 제시한 학생이 29.5%이며 오류 분석대상은 24.5%이다.

본 연구로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

첫 째, 이차함수의 그래프에 관한 문제 풀이과정에서 나타난 오류는 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류(37.0%)가 가장 많았고, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류(31.1%), 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류(21.7%), 기술적인 오류(10.2%)의 순으로 나타났다.

둘 째, 상 수준의 학생들은 축의 방정식을 이용한 그래프의 대칭성을 활용하지 못하는 경우가 많았다.

셋 째, 중 수준의 학생들은 이차함수의 표준형인 $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴에서 $p = 0$ 일 때 $y = ax^2 + q$ 꼴, $q = 0$ 일 때 $y = a(x - p)^2$ 꼴이라는 것을 잘 모르는 경우가 많았으며 축의 방정식 $x = p$ 에서 대칭성과 그 p 값이 꼭지점의 x 좌표가 된다는 사실을 잘 모르는 경우가 많다.

네 째, 하 수준의 학생들은 좌표평면상의 그래프를 이해하거나 좌표를 읽는 능력이 부족하며 좌표의 값을 식에 대입하거나 완전제곱식으로 바꿀 때 괄호처리와 계산상의 오류가 많다.

이와 같은 오류를 줄이기 위한 개선책으로는 다음과 같다.

첫 째 이차함수의 그래프의 지도는 이차항의 계수의 성질과 꼭지점을 중심으로 지도하고, 해석할 수 있도록 하는 것이 바람직하다.

둘 째 컴퓨터의 활용(GSP, 그래픽계산기 등)을 통하여 그래프를 시각화하여 지도할 필요가 있다.

※본 논문은 2000년 2월 한국교원대학교 대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

Ⅰ. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

클라인(F. klein)은 함수적 사고를 중심으로 학교 수학이 구성되어야 하고 수학 교육의 목표는 함수개념의 양성에 있다고 주장했다. 이와 같은 주장은 함수개념에 의해 수학적 제 사실들이 체계화, 구조화됨을 의미한다.(정영옥, 1997, p.133에서 재인용)

함수개념은 그 역사적 발생의 맥락에서 보면 여러 가지 물리적, 사회적, 정신적 세계 특히 수학적 세계에서 일어나는 변화 현상 가운데 그 '종속관계'를 설명하고 기술하기 위한 도구로서 도입되었다. 두 대상 사이의 순서화된 종속성을 나타낸 것으로 수학, 물리 뿐 아니라 일상생활에서도 나타나며, 주변에서 찾아볼 수 있는 많은 인과 관계를 수학적으로 표현한 것으로 현대 과학적 사고방식의 중심에 있다고 할만큼 중요한 개념으로 수학교육에서 핵심적 개념이다(우정호, 1997).

함수의 그래프는 현실 세계에서의 여러 가지 변화를 시각적으로 쉽게 파악할 수 있는 장점이 있으며, 함수가 표나 식으로 제공되었을 때보다도 많은 정보를 제공한다. 변화에 대한 전체적인 개관을 준다는 점에서 그래프의 활용을 좀더 중시해야하며, 그래프를 그리는 단계보다 그래프를 보고 변화를 해석하고 의미를 부여하는 과정이 중시되어야 한다(정영옥, 1997).

함수의 학습에서 기본적 주제 중의 하나는 그래프를 해석하는 방법과 그래프에 포함된 정보들로부터 함수의 성질을 인식하는 방법을 익히는 것이다. 함수의 이런 면은 매우 중요하고 보편적인 수학의 활용에서 많은 부분을 차지하므로 함수개념 도입시 다양한 그래프를 경험할 수 있어야 한다(김도상, 1994).

NCTM(1989)에서도 그래프의 해석은 함수의 개념을 더욱 명확히 할 수 있는 수단이며, 고등학교에서의 역함수 개념을 습득하기 위한 기초적 개념이기 때문에 중학교에서 그래프의 해석을 소홀히 해서는 안되며, 그리고 함수는 지필 문장, 대수적 공식, 투입 산출 값의 도표, 그래프 등으로 표현할 수 있는데, 학생들은 이들 표상을 학습하고 그 각각을 서로 번안할 수 있어야 한다고 했다.(류희찬, 1992, p.221에서 재인용)

그러나 현재 중학교 함수 단원의 내용은 대응표를 사용하여 대수적, 형식적이며 추상적인 측면이 강조되고 있으므로 현실적인 변화 상황을 기술하여 해석하고 예측하기 어려우며 함수의 성질은 그래프를 그려서 살펴보는 것이 매우 효과적이고 자연스럽지만 학생들은 함수의 본질을 기호적 표현 양식인 식이며 그래프는 그것을 시각화한 보조수단에 불과하다고 생각한다. 또한 문제해결에 있어서도 그래프를 통해서 문제를 해결하려고 하기보다 계산을 통해 문제를 해결하려는 경향이 강하다(우정호, 1998).

이러한 문제의 해결은 여러 가지 방향에서 시도되어 질 수 있으나, 무엇보다 함수의 그래프를 구성하거나 해석하는 데 있어서 학생들에게서 자주 발생하는 오류를 파악하여, 그 오류에 대한 지도 방법을 고안하고 지도함으로써 학생들은 함수에 대한 이해 및 그래프의 활용이 자연스럽게 되리라 믿는다.

Clayton(1990)은 유능하고 성공적인 수학 교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학의 구조를 알아야 할 뿐만 아니라 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략에 대한 지식을 갖추어야 한다고 말하고 있다. 따라서 현장의 수학 교사들은 학생들의 오류와 오개념을 파악할 필요가 있으며, 그것은 다음과 같은 긍정적인 결과를 가져온다고 볼 수 있다.

첫째, 학생들의 오류의 원천과 형태를 파악하고 각각의 오류에 대하여 학생들에게 좀 더 정확한 피드백을 가져다 줄 수 있다.

둘째, 오류유형은 종종 내재하는 수학적 개념의 잘못된 이해, 문제 해결 전략의 부족이나 미성숙한 문제 풀이 전략을 드러나게 한다.

셋째, 오류유형에서 드러난 학생들의 사고 과정의 결함 발견은 교수 계획을 수립하는 데에 많은 도움이 된다.

본 연구는 학생들이 그래프를 해석하거나 구성하는 능력의 증진을 위해 이차함수의 그래프에 관한 문제해결 과정에서 저지르는 오류들을 분석하고 그 원인과 개선책을 제시함으로써 보다 효율적인 교수 전략과 학생들의 수학 학습에 도움을 주고자 한다.

B. 연구 문제

본 연구는 오류분석 검사지를 통해 중학교 3학년 학생들이 이차함수의 그래프 영역에서의 문제풀이 과정에서 보인 오류를 분석하고, 분석된 자료에 의하여 오류모델을 설정하며 앞으로의 교수-학습에 도움을 주고자하며 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 학습능력(상, 중, 하)에 따른 중학교 3학년 학생들의 이차함수의 그래프 영역에서 발생하는 오류유형을 분석한다.
2. 각각의 오류유형에 대한 오류의 원인을 분석하여 그 개선책을 제시한다.

C. 용어의 정의

오류의 의미를 국어 사전에서 찾아보면, '바르지 못한 논리적 과정 및 그 결과로 생긴 추리나 판단'으로 기술하고 있다.

본 연구에서의 오류는 이차함수의 그래프에 관한 문제 풀이 과정에서 나타나는 수학적인 오류로써 다음의 네 가지 형태를 말한다.

첫째, 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류 : 문제에 주어진 자료와 학생들이

그 자료를 다루는 방법 사이의 어떤 모순과 관련된 오류를 말한다.

둘째, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류 : 한 상징적인 언어 안에 표현되어 있는 수학적 사실들을 다른 상징적인 언어로 잘못 해석하는 오류를 말한다.

셋째, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류 : 특정하고 동일한 규칙, 원칙, 정리 혹은 정의 등이 잘못 이해되어 쓰여지는 경우에 있어서의 오류를 말한다.

넷째, 기술적인 오류 : 문제를 푸는 과정에서 연산을 잘못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류를 말한다.

D. 연구의 제한점

본 연구에서 제시된 연구자료들은 김천시에 있는 2개 중학교 3학년 학생 252명의 학생을 대상으로 하였으므로 이 자료는 다른 집단에 의해서는 연구결과가 다르게 나타날 수도 있고 오류모형의 분류에서도 연구자에 따라서 오류모형이 달라질 수도 있다. 그러므로 본 연구결과를 오류의 판단 기준으로 일반화하는 데에는 주의를 요한다.

E. 기대되는 효과

본 연구를 통해서 다음과 같은 효과를 기대할 수 있다.

1. 이차함수의 그래프에 관하여 학습능력에 따른 학생들의 오류유형을 분석함으로써 각각의 오류의 예방 및 지도에 도움을 줄 수 있다.
2. 학생들의 오류의 원인을 분석하여 그 개선책을 가짐으로써 오류를 치료하고 방지하는 데 도움을 줄 수 있다.
3. 이차함수의 그래프를 이해하게 됨으로써 함수의 이해를 심화시키고 그래프와 관련된 문제를 해결하는 데 도움이 될 수 있다.

Ⅱ. 문헌 연구

본 연구와 관련되는 문헌은 크게 세 개의 단원 즉 함수, 함수의 그래프, 오류로 나누어 검토하였다.

함수는 함수의 개념이 무엇인지 그 역사적 발달을 중심으로 고찰하였다. 역사적 발달을 거치면서 어떤 변화가 있었으며 현재 우리가 사용하고 있는 함수의 개념은 무엇이고, 그 이전의 개념과는 어떤 면이 다른지를 살펴서 함수개념의 어떤 측면에 강조점을 두어야 하는지를 살펴보았다.

함수에 관한 표상으로서의 그래프와 함수의 대수식과 그래프사이의 번역에 대해 살펴보았다.

오류는 국내외에서 발표된 대표적인 선행연구를 중심으로 살펴보았다.

A. 함수

함수 개념이 학교 수학에서 중요시된 것은 20세기 초 독일에서 Klein에 의해 함수개념을 중심으로 한 수학교육의 개혁이 이루어진 이후이다. 실제로 사칙 연산이 수의 순서쌍들의 집합 위에 정의되는 함수임을 고려한다면, 함수 개념은 초, 중, 고의 수학의 많은 부분을 차지하는 개념이며, 미적분학과 관련성을 고려할 때 학교 수학의 핵심적인 분야라고 하지 않을 수 없다. Klein(1968)은 함수적 사고의 중요성은 응용을 포함한 수학 전체를 포괄하는 데 있다고 생각했다. 그는 그 당시 수학교육에서 중요시되었던 수 직관과 공간 직관의 통합을 목표로 해석기하학적 사고를 수학교육 개혁의 핵심으로 보았다. 수와 공간을 이어주는 주제 영역은 함수이며 함수의 그래프를 통해서 대수와 무한소 계산 그리고 다른 한편으로는 대수와 기하의 바람직한 결합이 가능하기 때

문이었다. 그는 함수 개념은 대응이란 추상적인 정의가 아니라 종속성이라고 하는 Euler식의 관점에 따라 학교 수학에 효소처럼 스며들어야 하며, 기본적인 예들을 통해 학생들에게 살아 있는 자산으로 전달되어야 할 것으로 보았다.(정영옥, 1997, p.133에서 재인용)

함수개념의 본질은 그 개념의 시작과 그 발전에서 찾아 볼 수 있을 것이므로 이 절에서는 그 역사적 발달을 중심으로 알아본다. 함수개념은 크게 기하학적인 함수개념에서 대수적인 함수개념을 거쳐 논리적인 함수개념으로 발달했다(박교식, 1992, pp. 118 129).

1. 기하학적 함수개념

17세기에 소개된 대부분의 함수는 곡선으로 연구되었는데, 기하학적 함수개념이란 함수개념이 운동을 나타내는 곡선과 관련해서 도형적으로 개념화되었다는 측면에서 나온 것이다. Galileo는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리는 그 거리까지 움직이는데 걸린 시간의 제곱에 비례한다는 것을 관찰, 그러한 현상을 양적으로 조직하고자 했다. 양적으로 조직화된 종속은 운동을 나타내는 여러 가지 곡선과 결합되어 곡선의 형태를 중심으로 운동을 연구한 것이 함수개념의 시작이었다. 이것은 시간에 따른 거리의 변화를 연구한 것으로 시간과 공변하는 양으로서의 거리를 염두에 둔 것이다(M. Kline, 1972).

이 당시 주된 연구문제는 변수의 도입과 방정식에 의한 변수사이의 관련성의 표현이었다. 해석 기하학의 출현으로 곡선과 관련된 함수에 관한 식이 점점 강조되고 식을 나타내는 기호의 역할에 주의가 집중되면서, 곡선과 무관하게 기호사이에 성립하는 관계에 주의가 집중되었다. 그러나 곡선을 나타내는 방정식에서 독립변수와 종속변수의 구별이 분명하지 않았다.

2. 대수적인 함수 개념

18세기에 들어서면서 함수개념은 기하학적인 곡선으로부터 분리되어 기하학적인 개념을 포괄하는 대수적 공식으로서의 개념으로 변화한다. 이것을 대수적인 함수개념이라고 한다. Euler는 〃 변수 양의 함수는 어떠한 방식으로든 변수 양과 수 또는 일정양으로부터 구성된 해석적인 식이다. 〃 라고 정의하였다. (조한숙, 1991, p.10에서 재인용)

18세기에 함수개념의 발달의 직접적인 계기가 되었던 것은 진동하는 끈의 문제였다. 진동하는 끈의 문제란 다음과 같다.

양 끝점이 고정된 끈을 잡아당겨 어떤 모습을 만든 후 잡았던 끈을 놓으면 그 끈은 진동하기 시작해서 최초 모습으로부터 다른 모습으로 변한다. 이 때, 시간 t에서 그 바뀐 끈의 모습을 나타내어라.(박교식, 1992, p. 123에서 재인용)

이 당시 하나의 곡선은 하나의 해석적 표현을 갖는다는 생각이 일반적이었다. d' Alembert는 t초 후의 모습은 초기 모습에 의해 결정되므로 최초 모습을 나타내는 방정식을 구함으로써 일반해를 구했다고 생각했다. 그러나 Euler는 어떤 구간에서의 그래프가 반드시 하나의 함수만을 나타낸다고 생각하지 않았다.

서로 다른 정의역에서 서로 다른 해석적 표현을 가지는 함수가 있음을 실험을 통해서 밝혔으며, 자유롭게 그려진 곡선의 경우 그것을 어떤 해석적 표현의 결합으로 주어지지 않을 수도 있는 함수의 가능성을 밝혔다. 이런 입장으로부터 해석적 표현이란 말이 없는 새로운 함수의 정의가 나타나게 되었다. 그로부터 Euler는 다음과 같이 정의하였다.(조한숙, 1991, p.11에서 재인용)

만약 어떤 양이 다른 것에 의존한다면 전자를 후자의 함수

이로부터 독립변수와 종속변수의 구분이 확실해졌으며, 하나의 곡선으로부터 함수의 개념을 확장 시켰다. 각각의 변수들이 독립변수로 선택될 수 있다는 관점아래 각 변수의 구체적인 변화와 무관하게 각 변수를 어떤 형태로든 연결할 수 있느냐가 중요하게 되었다. 이것은 함수가 그 기하학적인 원천과 관계없이 대수적으로 조작가능하다는 것을 의미한다.

3. 논리적 함수 개념

대수적인 함수개념을 포괄하는 새로운 함수개념이 논리적 함수개념인데 이것은 함수개념이 더 이상 대수적인 식에 달려있는 것이 아니라 두 변수가 대응이라고 하는 논리적 조건을 만족하느냐 하는 것에 관련되어 있다는 의미이다(박교식, 1992, p. 124).

Euler와 Lagrange는 서로 다른 정의역에서 서로 다른 해석적 표현을 가지는 함수를 받아들였다. Fourier는 열전도에 관한 그의 논문에서 임의의 함수는 삼각 급수로 전개하는 것이 가능하다고 하였다. Cauchy는 이와 같은 결과를 받아들이기 위해 대수적 함수에서 성립하는 성질을 마치 그것이 모든 함수에서 성립하는 것처럼 자유롭게 사용하는 것과 발산하는 급수를 사용하는 것이 정당화되지 않았다는 이유에서 함수를 다루기 위한 새로운 개념을 도입했다. 이로부터 Cauchy는 다음과 같이 말했다.(박교식, 1992, p.127에서 재인용)

여러 변량들이 서로 관계가 있어, 이중에서 어느 한 변량의 값이 주어지면, 다른 변량의 값도 정할 수 있을 때, 사람들은 보통 이 다양한 양들이 독립변수라는 이름을 갖는 그들 중의 어느 한 변량에 의해 표현되는 것으로 생각한다. 그리고 이 때, 나머지 변량들을 이 독립변수의 함수라고 부른다.

이런 함수개념의 발달을 바탕으로 Dirichlet는 소위 Dirichlet 함수라고 부르는 예를 제시하였는데 그 함수는 다음과 같다.(조한숙, 1991, p.12에서 재인용)

$$D(x) = \begin{cases} c & : x\text{가 유리수일 때} \\ d & : x\text{가 무리수일 때} \end{cases}$$

이것은 해석적 표현으로 주어지지도 않고, 자유롭게 그려진 곡선도 아니며 어디에서도 불연속인 함수의 최초의 예이며, 임의의 대응으로 함수개념을 설명한 예이다. 이로부터 함수를 다음과 같이 정의하였다.(박교식, 19992, p.127에서 재인용)

주어진 구간에서 x의 각 값에 y의 유일한 값이 대응할 때, y는 x의 함수

이제 함수의 개념에서 y가 하나의 법칙에 따르는지, x에 종속되는지의 문제는 중요하지 않게 된 것이다. 변수는 어떤 문자가 취할 수 있는 여러 가지 값 중에서 어느 한 값을 나타내는 문자로 해석하게 되었으며 변수로부터 운동이라는 아이디어는 제거되었다.

19C 함수론에 눈부신 발전이 있은 후 임의의 집합들 사이의 사상으로서의 함수개념이 20C 수학에서 점차 지배적인 관점이 되었다. 여기에서 함수개념은 한 집합에서 다른 집합으로의 사상개념으로 일반화되었다. 이러한 함수개념은 Cantor의 집합론과 Dedekind가 확립한 사상의 개념에 의해 뒷받침된다. 1887년 Dedekind는 사상을 다음과 같이 정의했다.(조한숙, 1991, p. 13에서 재인용)

두 집합 A, B가 있을 때 A의 각 원소에 대응하여 B의 원소가 오직 하나씩 대응되는 규칙이 있으면 이 대응규칙을 A에서 B로의 사상

특히, A, B가 수의 집합일 때 이 사상을 '함수'라고 정의하였다. 오늘날 함수 개념의 적용범위가 넓어짐에 따라 함수와 사상을 동의어로 사용하고 있다.
1937년 Bourbaki는 다음과 같이 함수를 정의했다.

E, F를 집합이라고 하자. E의 변수x와 F의 변수 y사이의 관계가 만약 ' 모든 $x \in E$에 대하여 x와의 주어진 관계에 있는 $y \in F$가 있다면 ' 그 관계를 함수적 관계라고 한다. (조한숙, 1991, p.13에서 재인용)

역사적으로 함수 개념은 이와 같이 여러 단계의 변화를 거쳐 발달해 왔다. 천체운동을 기술하기 위한 수단으로서의 전함수 개념, 그래프와 곡선의 형태로 표현된 기하학적 함수 개념, 식으로 표현된 대수적 함수 개념, 대응으로서의 집합적 함수 개념으로 발달해 왔으며 Bourbaki에 와서는 관계로 정의된 함수 개념 등으로 발달해 왔다. 따라서, 오늘날 교과서에서도 임의의 대응이나 특수한 관계라는 Dirichlet-Bourbaki 방식으로 함수를 정의하고 있다. 그러나, 함수 개념이 여러 가지 필요성에 의해서 새롭게 정의되는 과정을 거쳐 수학화되어 가는 동안 원래의 함수 개념에서 중요했던 여러 측면이 현재의 Dirichlet-Bourbaki식 정의에서는 사라져 버림으로써, 학생들에게는 사실상 중요한 함수 개념의 도구적 의미가 감추어진 피상적이고 형식적인 측면만이 제시되기 때문에 함수 개념 지도에 많은 문제점이 제기되는 것은 불가피하다.

함수를 지도할 때, 대응이라는 의미가 가지고 있는 일가성과 임의성 그리고

함수의 역동적 측면을 전달하고자 하는 것이 목표라면, 현대적인 의미의 '대응'으로 규정하기보다는 여러 가지 변화 현상을 다루어 보는 중에 종속 관계를 파악하고, 기하학적 사상과 같은 특성을 가진 여러 현상들을 다루어 봄으로써 점진적인 수학화에 의해 이런 현상들을 통합해서 일반적인 함수 개념을 형식화할 수 있어야 한다. 또한 학교 수학에서 그 수학적 중요성을 고려할 때, 합성과 역의 의미를 더 중요하게 부각시켜야 할 것이다.

Freudenthal은 '대응'의 정적인 정의보다는 'A에서 B로의 함수는 A의 각각의 원소에 대해 B의 원소를 지정하는 행동'으로 정의함으로써 임의성이나 일가성의 의미 그리고 독립변수에서 종속변수로의 방향성의 의미를 살리는 것뿐만 아니라 함수의 동적인 측면과 역과 합성의 의미를 부각시키고자 하였다. (정영옥, 1997, p.142 143에서 재인용)

B. 함수의 그래프

함수에 관한 많은 표상들이 사용되고 있으며, 그 중에서 학교에서 가장 많이 알려지고 사용되는 것이 표, 그래프, 그리고 해석적 식이다.

수학적 개념, 과정 또는 대상은 종종 매우 다른 방식으로 표상될 수 있다. 이런 경우에 한 표상에서 다른 것으로의 번역(translation)이 가능하다. 9학년에서 12학년까지를 위한 NCTM standards에서도 함수단원에서 다음을 강조하고 있다 : 함수의 표, 기호, 그래픽 표상 사이를 번역하라. 함수의 그래프에 대한 모수의 변화를 분석하라.

번역은 표상에 대한 두 과정(process)-해석(interpretation)과 모델화(modelin-g)-을 포함한다. Swan(1985)에 의하면, 해석은 그래프가 말하는 것을 듣는 것에 해당하며, 모델화는 그것들과 함께 이야기하는 방법에 대응된다. 함수에서 예를 들면, "대수식에서 그래프로"의 번역이 모델화이고, "그래프에서 대수식

으로"의 번역이 해석이다. Janvier는 번역하기 이전의 양식을 자료(source)로 보고 번역된 양식을 목표(target)로 볼 때 source를 "target방식으로" 보아야만 한다는 점을 강조한다. 다시 말하면, target의 관점으로부터 그것을 살피고 결과들을 유도해야만 한다는 것이다. 예를 들어서 "그래프에서 대수식으로" 번역을 할 때는 그래프를 대수식의 관점에서 살펴보고 그 특징들을 살펴보아야 한다는 것이다.(신인숙, 1993, p. 24에서 재인용)

그러나 오늘날의 학생들은 종종 식을 다른 어느 것도 나타내지 않는 그 자체로만 여기는 경향이 있으며, 그래프를 기껏해야 부분적(pointwise)인 정보를 추출할 수 있는 영상(icon)으로만 여기며, 전반적(across-time)인 방법의 이해 발달에는 심각한 장애를 가지고 있는 학생이 많다(Monk, 1992). 그래프는 함수에 대한 사고의 다른 면을 제공한다. 그러나 학생들은 그래프와 그 안에 내재하고 있는 대수식 사이를 거의 관련짓지 못한다. Dreyfus & Eisenberg(1990)는 그 이유를 학생들이 책과 강의에서 정보를 연속적으로 얻는데 의존하는 데에 반해서 그래프적인 정보는 비연속적이기 때문이라고 말하고 있다.(신인숙, 1993, p. 26에서 재인용)

함수의 그래프 그리기는 주어진 공식에 수를 대입해서 표를 만들고, 적당한 축척을 정해서 좌표평면 위에 점을 나타내고 그 점들을 이어서 부드러운 곡선으로 이어주는 것을 의미하는 것으로 중요한 활동이다. 그러나, 여기서 학생들의 활동이 중단된다면, 이 활동은 더 큰 의미를 갖지 못한다. 학생들에게 증가구간, 불연속성 등과 같은 그래프의 전반적인 특성을 개관할 수 있게 하고, 그래프에 맞는 상황을 찾아봄으로써 의미를 부여할 수 있도록 해야 한다. 그래프 그리기와 해석하기는 함수에 대한 기본적인 이해가 시작되는 곳이다. 그래프 표현에 있어서 처음부터 좌표평면을 이용한 그래프를 그리도록 강요하지 말고, 처음에는 질적 접근을 통해서 그림을 그려보는 것으로 시작하여 점차적

으로 형식적인 틀에 맞추어 그래프를 그려 나가도록 해야 할 것이다.

학생들에게는 그래프가 어떤 상황을 얼마나 효율적으로 기술하는가를 알게 하는 기회를 제공한다. 측정하고 공식 맞추기는 어떤 문제 상황에서 측정한 결과를 표로 나타낸 다음 그에 적합한 대수식을 찾아보는 것을 의미한다. 곡선 맞추기는 함수의 대수식과 그래프를 연결하는 과정으로, 예를 들면 함수식 $y = (x - 2)(x + 3)$ 이 주어지고 여러 가지 그래프가 주어졌을 때 옳은 그래프를 찾는 문제나 $y = x(a - x)$ 에 대한 그래프가 주어졌을 때, a 의 값을 찾는 것과 같은 과정으로 학교 수학에서 많이 다루어지는 내용이다. 매개변수를 인식하는 과정은 주어진 공식에서 변수가 여러 개 있는 경우에 그 중에 매개변수를 가려내고 매개변수에 따르는 함수의 변화를 이해하도록 하는 과정을 의미한다.

그래프는 필요에 따라 점별로, 국소적으로, 전체적으로 해석된다. 그래프를 해석하는 방법에 있어서 처음에는 전체적으로, 그 다음에는 국소적으로, 그리고 점별 접근을 시도하고 어느 경우에는 이 세 가지가 모두 통합이 되도록 지도해야 한다. 점별로 해석하기는 주어진 독립변수에 대응되는 종속변수의 값을 찾거나 그 반대의 활동을 하는 것이다. 국소적으로 해석하기는 한 점의 근방에서 그래프의 행동, 즉 양, 음, 증가, 감소, 최소값, 최대값을 알아보는 것이다. 전체적으로 해석하기는 양 또는 음의 구간, 증가 구간, 감소구간, 최대, 최소, 기울기의 변화, 점프, 극점 등을 찾을 때, 단조성, 진동, 주기, 일차, 이차 아니면 다른 대수적인 특성, 지수적 특성, 삼각함수적 특성들을 진술할 때 필요하다.

그래프는 현실 세계에서의 여러 가지 변화를 시각적으로 쉽게 파악할 수 있는 장점이 있으며, 함수가 표나 식으로 제공되었을 때보다도 많은 정보를 제공한다. 변화에 대한 전체적인 개관을 준다는 점에서 그래프의 활용을 좀더

중시해야 하며, 그래프를 그리는 단계보다 그래프를 보고 변화를 해석하고 의미를 부여하는 과정이 선행되어야 한다.

C. 오류

학생들이 실수나 오류를 범하는 이유는 그들이 갖고 있는 지식이 불완전하거나 부정확하기 때문이라고 볼 수 있다. 교사가 수업을 할 때 설명식으로 너무 빨리 진행하거나 추상적이고 경직된 방법으로 진행한다면 학생들은 기계적으로 수학을 암기하게 된다. 그 결과 학습 내용이 무의미한 정보처럼 보일 수도 있으며, 학습 내용을 정확하게 이해되지 못하여 결과적으로 학생들은 정확한 지식을 소유하지 못하거나 잘못된 개념이나 절차를 배우게 된다. 즉, 오개념이 형성되거나 아주 잘못된 절차를 적용하여 문제풀이에서 오류를 범하게 된다. 다시 말하면 오류는 특별히 수업이 학생들에게 의미없게 느껴질 때 더 쉽게 일어난다.

Brousseau(1986)은 오류가 발생하는 원인의 특징을 다음 네 가지로 분류하고 있다.

첫째, 오류는 종종 수학의 기본적인 개념에 관한 오개념의 결과이다.

둘째, 오류는 때로는 교사에 의한 체계적인 지도 과정의 결과로서 일어난다.

셋째, 오류는 학생들이 결함이 있는 절차를 사용하고 교사에 의해 잘못 인식된 오개념을 가짐으로써 발생하기 쉽다.

넷째, 학생들은 종종 문제해결을 위해 자신의 독창적이고 비형식적인 방법을 창안하는데, 이것들은 더욱 일반적인 문제 형태의 특별한 경우에 기초한 귀납적 추론 과정의 결과이며, 그런 방법들이 때로는 심각한 오류를 일으킨다.

Bibbit(1990)은 '산술에 관한 문제 해결에서의 오류의 형태에 관한 연구' 중에서, 4차 NAEP에서 나온 오류의 빈도수 자료와 남부캘리포니아의 초등학교

5학년과 6학년 학생 431명의 문제 해결 수행 연구에서는 오류의 형태를 크게 다음의 네 가지 범주로 나누었다.

(1) 계산의 오류(computational errors)

(2) 연산 오류(operational errors)

(3) 시도하지 않은 오류(non-attempt errors)

(4) 복합적인 오류(miscellaneous errors)

여기에서 가장 빈번한 오류는 계산 오류였고, 그 다음으로는 연산 오류로 나타났다. 5학년과 6학년이 문장제 문제에서 가장 빈번히 범하는 오류의 거의 반이 잘못된 연산의 선택에 기인하며 4가지 형태- 역 연산, 더 단순한 연산, 임의의 선택, 미성숙한 전략이었다.

Radatz (1979)는 정보처리 이론을 기초로 해, 수학의 영역에 걸쳐서 오류를 발생시키는 절차에 의하여 오류의 원인에 대한 분류 모델을 다음과 같이 제시했다.

(1) 언어의 난이성

(2) 공간 정보 획득의 어려움

(3) 사전 지식의 습득 부족

(4) 사고의 경직성 또는 부정확한 연합

(5) 관련이 없는 법칙이나 전략의 적용

그는 오류의 원인은 서로 상호 작용이 있기 때문에 같은 문제에서도 서로 다른 오류가 일어날 수도 있고, 서로 다른 문제에서도 같은 오류가 일어날 수 있다고 하였고, 오류의 원인에 대한 명확한 분류와 위계를 달성하는 것은 어렵다고 하였다. 또 이것이 그의 초등학교 과정의 수학의 예에서 발생하였다면, 중등 수학의 오류에서도 발생할 것이라고 하였다.

이스라엘의 Movshovitz-Hadar와 Orit Zaslavsky는 고등학생들이 졸업시험

에서 반복적으로 보이는 실수에 대하여 관심을 갖고 2년 간에 걸친 체계적인 연구를 하여 고등학교 수학에서의 경험적인 오류 모델을 분류하였다. 그는 고등학생들이 범하는 오류는 우연한 것이 아니며, 학생들에게는 나름대로의 뜻이 통하는 유사-논리에 의해서 일어난다고 가정하였다. 그는 Radatz(1979)가 오류의 원인에 대한 엄밀한 분류가 어렵다는 것에 근거를 두고, 구조적이라고 불리는 질적인 방법으로 다음과 같은 오류의 모델을 제시하였다.

(1) 잘못 이용된 자료 : 이 범주는 문항에 주어진 자료와 학생들이 사용한 자료 사이의 불일치로 인한 오류이다.

(2) 문제 내용의 잘못된 해석 : 이 범주는 수학적인 사실들을 하나의 수학적인 기호 언어에서 다른 언어로 옮기는 과정의 부정확을 다룬다.

(3) 논리적으로 부적절한 추론 : 주어진 정보에서의 타당치 못하게 이끌어 내어진 정보이거나 이미 추론된 것에서 타당치 못하게 이끌어 내어진 새로운 정보이다.

(4) 왜곡된 정의나 정리 : 특별한 원리나 법칙, 정리, 정의의 왜곡을 다룰 때 나타나는 오류들을 나타낸다.

(5) 검토하지 않은 해답 : 이 범주의 오류들의 특징은 수험생들이 밟은 각 단계들 그 자체는 옳다는 것이다. 그러나 검토하지 않았기 때문에 마지막에 제시된 해는 옳지 않다는 것이다.

(6) 기술적인 오류 : 이 범주는 자료를 끌어낼 때의 오류들, 기초적인 대수 기호 조작의 오류들을 포함한다. 그리고 계산 수행에서의 다른 실수들이 일어난다.

이상은 연속적으로 두 해에 걸친 시험 결과의 분석으로, 첫 해 130개, 두 번째 해 150개, 총 280개의 오류들의 각 범주별 백분율은 다음 <표Ⅱ-1>과 같다.

<표Ⅱ-1> 각 오류 범주별 백분율(%)

범 주	첫 번째 해	두 번째 해
잘못 이용된 자료	22	20
문제 내용의 잘못된 해석	17	18
논리적으로 부적절한 추론	2	1
왜곡된 정의나 정리	34	32
검토하지 않은 해답	0	2
기술적인 오류	25	27

위 <표Ⅱ-1>에 의하면 고등학생의 경우에는 기술적인 오류도 흔히 범하지만 정리나 정의를 적절하게 사용하지 못하는 데서 오는 오류가 상당한 부분임을 알 수 있다.

김옥경(1990)은 고등학교 학생들을 대상으로 테스트를 실시하고 오류를 분석 연구하여 오류의 분류 모델을 제시하였다.

확률과 통계 단원을 제외한 고등학교 수학과정을 모두 배운 고3학생들을 대상으로 한 테스트는 12개의 주관식 문항으로 구성되었으며 오류 모델은 여덟 가지 범주로 Hadar의 여섯까지 범주에 '풀이 과정이 생략된 오류'와 '오류의 애매 모호성'이 추가된 것이다. 이러한 오류범주에 대한 빈도수를 살펴보면 <표Ⅱ-2>와 같다.

김옥경의 오류 분류에 따르면 역시 곡해된 정리나 정의에 의한 오류의 빈도가 가장 높았고, 이것으로 보아 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는데 문제가 있음이 밝혀졌다.

<표Ⅱ-2> 김옥경의 각 오류 범주별 빈도수

오 류 의 종 류	빈 도 (%)
오용된 자료	16.8
잘못 해석된 언어	11.8
논리적으로 부적절한 추론	4.6
곡해된 정리와 정의	30.2
요구되지 않은 해답	5.5
기술적 오류	11.4
풀이 과정의 생략	16.2
오류의 애매 모호성	3.5
합 계	100

오정현(1995)은 "중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구"에서 중학교 1, 2, 3학년 학생 147명을 대상으로 중학교 함수영역의 문제 풀이 과정에서 발생하는 오류를 다음과 같이 7가지로 분류했고, 오류분석은 <표Ⅱ-3>과 같이 나타났다.

(1) 오용된 자료

(2) 잘못 해석된 언어

(3) 논리적으로 부적절한 추론

(4) 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련

(5) 요구되지 않은 해답

(6) 기술적 오류

(7) 풀이 과정의 생략

이상에서 살펴본 바와 같이 수학에서 발생하는 오류에 대한 연구가 각 국에서 많은 수학 교육자들에 의해 다양한 측면에서 이루어지고 있음을 알 수 있

다.

<표Ⅱ-3> 오정현의 각 오류 범주별 빈도수

오 류 의 종 류	빈 도 (%)
오용된 자료	5.9
잘못 해석된 언어	1.0
논리적으로 부적절한 추론	13.2
필수적인 사실·개념의 부족한 숙련	32.7
요구되지 않은 해답	3.1
기술적 오류	25.4
풀이 과정의 생략	18.6
합 계	100

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. 연구 대상

본 연구를 수행하기 위해서 김천시내에 소재하고 있는 2개 중학교를 선정하였다. 선정된 학교의 학력과 문화 경제적 수준이 경상북도 내에서 중간 수준이며 중학교 3학년 함수 단원을 이미 학습하였다.

본 연구의 검사를 위해서 3학년 6개반(252명)을 대상으로 실시하였다.

B. 검사도구

본 연구에서 사용할 검사 도구는 본 연구자가 개발하여, 현장 교사들과 협의하고 검토한 후에 전문가에게 타당성을 검증 받았다. 검사지는 학생들의 이차함수의 그래프에 대한 오류를 검사하기 위하여 현행 중학교 3학년 5종 교과서에서 공통으로 다루지는 교과서 수준의 난이도로 만들었으며 이차함수의 그래프 유형별로 목표와 문항수는 <표Ⅲ-1>과 같다.

본 검사에서 사용할 검사지의 신뢰도를 높이기 위하여 먼저 예비검사를 실시하여 평가문항에 응답하는데 소요되는 시간과 문항의 수준의 적절성, 문항의 수 그리고 응답율 등을 알아보았다.

검사지의 예비검사는 현장의 수학교사들의 협조를 얻어 김천시내에 있는 중학교에서 1개반을 대상으로 실시하였다.

예비검사에서 일부 보완하여 수정된 검사지를 중학교 3학년 6개반을 대상으로 본 검사를 실시하고 상, 중, 하로 나누어 오류유형과 원인을 분석하였다.

<표Ⅲ-1> 이차함수의 그래프 유형별 목표와 문항수

그래프 유형	목 표	문항수
이차함수 $y = ax^2$ 의그래프	· 이차항의 계수 a값이 그래프의 폭과 모양을 결정함을 알 수 있다. · x축에 대칭인 그래프의 식을 구하고 그릴 수 있다.	4
이차함수 $y = ax^2 + q$ 의 그래프	· $y = ax^2$ 의 그래프를 평행이동하여 $y = ax^2 + q$ 의 그래프를 그릴 수 있다. · $y = ax^2 + q$ 의 그래프의 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구 할 수 있다. · $y = ax^2 + q$ 의 그래프위의 점을 알 때, 그래프의 식을 구할 수 있다.	4
이차함수 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프	· $y = ax^2$ 의 그래프와 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프와의 관계를 알 수 있다. · $y = a(x - p)^2$ 의 그래프의 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구할 수 있다. · $y = a(x - p)^2$ 의 그래프의 축의 방정식을 알 때, 꼭지점의 좌표를 구할 수 있다. · $y = a(x - p)^2$ 의 그래프의 꼭지점과 한 점의 좌표를 알 때, 그래프의 식을 구할 수 있다. · $y = a(x - p)^2$ 의 그래프에서 x값이 증가할 때, y값이 감소하는 x값의 범위를 구할 수 있다.	4
이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프	· $y = ax^2$ 의 그래프를 평행이동하여 $y = a(x - p)^2 + q$ 의그래프를 그릴 수 있고, 두 그래프 사이의 관계를 알 수 있다. · 세 그래프 $y = ax^2$, $y = a(x - p)^2 + q$, $y = a(x - p)^2$, $y = a(x - p)^2 + q$ 사이의 관계를 알 수 있다. · $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프의 꼭지점과 한 점이주어질때, 그래프의 식을 구할 수 있다. · $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프를 보고 a, p, q 의 부호를 알 수 있다.	4
이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프	· $y = ax^2$ 의 그래프와 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와의 관계를 알 수 있다. · $y = ax^2 + bx + c$ 를 $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴로 나타내어 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구할 수 있다. · $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 x값이 증가할 때, y값도 증가하는 x값의 범위를 구할 수 있다. · $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 이용한 응용문제를 해결할 수 있다.	4

C. 연구 일정

(1) **예비검사지 작성과 검사도구 제작** : 1999. 7. 22 8. 28

(2) **예비검사 실시** : 9. 1

(3) **예비검사지 분석 및 수정, 보완** : 9. 3 9. 20

(4) **본 검사 실시** : 9. 21

(5) **검사 결과 분석 및 통계 처리** : 9. 23

D. 자료의 결과 처리 및 분석

1. 오류의 분석

오류분석은 연구대상자들이 검사지에 직접 기록한 풀이 과정을 보고 분석하였다. 252명의 학생들의 답지에서 960개의 오류를 뽑아내었는데, 상 수준에서 193개, 중 수준에서 369개, 하 수준에서 398개가 나왔다.

처음에는 일반적인 오류의 유형인 부주의로 인한 오류, 과정상의 오류, 개념적인 오류에 기초를 두고 이스라엘의 수학자 Movshovitz-Hardar의 오류 모델 6가지-잘못 사용된 자료, 문제 내용의 잘못된 해석, 논리적으로 부적절한 추론, 왜곡된 정의나 정리, 검증되지 않은 해답, 기술적인 오류-를 참고로 하여 4가지로 모델을 설정하여 분석하였다. 같은 문제의 풀이 과정에서 여러 개의 오류가 발생한 경우에는 먼저 발생한 오류만 분석의 대상으로 삼았고, 다음과 같은 문항은 분석 대상에서 제외 시켰다.

(1) 완전한 답을 제시한 문항

(2) 무응답한 문항

(3) 풀이 과정에서 끝까지 풀지 못하고 중간에 그만 두었거나 답만을 제시한

문항

2. 자료의 분석 방법

학생들이 문제풀이 과정에서의 오류분석은 문항의 요소별(이차함수의 그래프 유형별)로 검사지에 답한 문제 풀이 과정을 통하여 오류를 찾아 분석하였고 그것을 토대로 오류의 원인과 개선책을 찾아보았다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

A. 오류의 모델 설정

수학내용의 논제들에서 발생하는 오류들의 다양한 원인은 수학적인 정보들을 얻고, 처리하고, 보유하고, 재생산하는데 쓰이는 기재들을 조사함으로써 확인될 수 있지만, 주어진 오류에 있을 수 있는 원인을 정확하게 분리한다는 것은 매우 어렵다. 왜냐하면 그 원인들 사이에는 어떤 밀접한 상호 작용이 있기 때문이다. 그러나 현장에서 학생들을 지도하는 교사에게는 오류 원인에 대한 인지적인 모델을 가진 오류 유형에 대한 연구 및 결과가 학생을 이해하는데 도움이 되고 다음 지도 계획을 적절히 구성할 수 있으므로 필수적으로 요구된다.

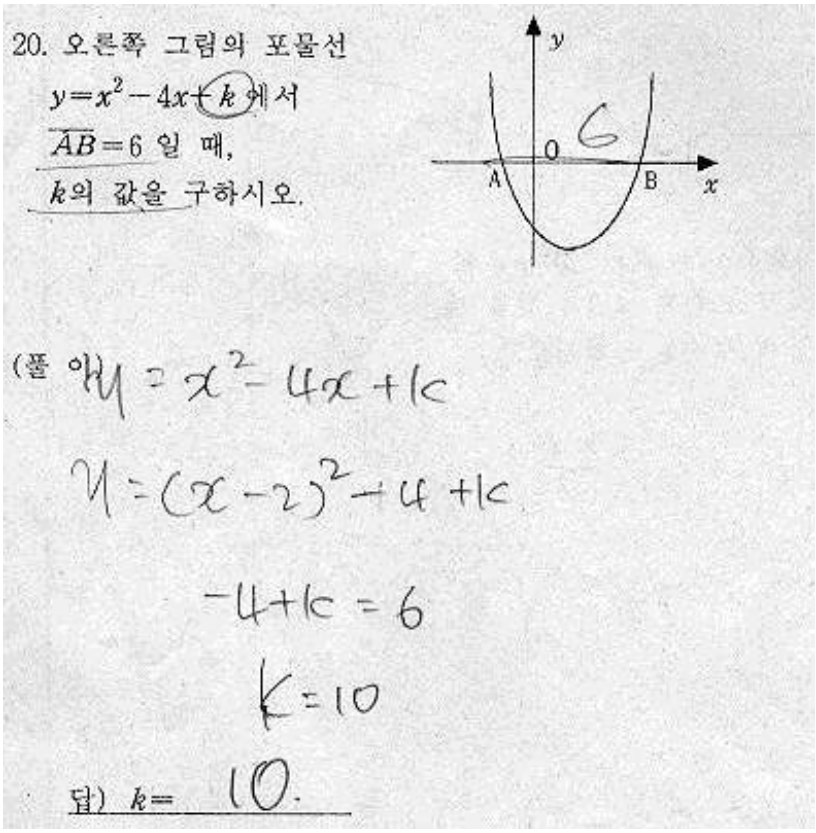
다음은 검사지를 통한 오류들을 4가지 모델로 분류한 것으로써, 분류 기준이나 세부 내용을 정리하여 제시한 것이다.

1. 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류(A형)

문제에 주어진 자료와 학생들이 그 자료를 다루는 방법 사이의 어떤 모순과 관련된 오류를 포함한다. 이런 오류는 처음에 자료들을 구성 할 때, 혹은 후에 자료들을 처리하는 동안에 저질러질 수도 있다. 세부 내용을 정해보면 대체로 다음과 같이 기술되어진다.

A1) **문제에 주어지지 않고, 주어진 조건에서 즉시 나오지 않는 것을 하나의 정보로 사용**

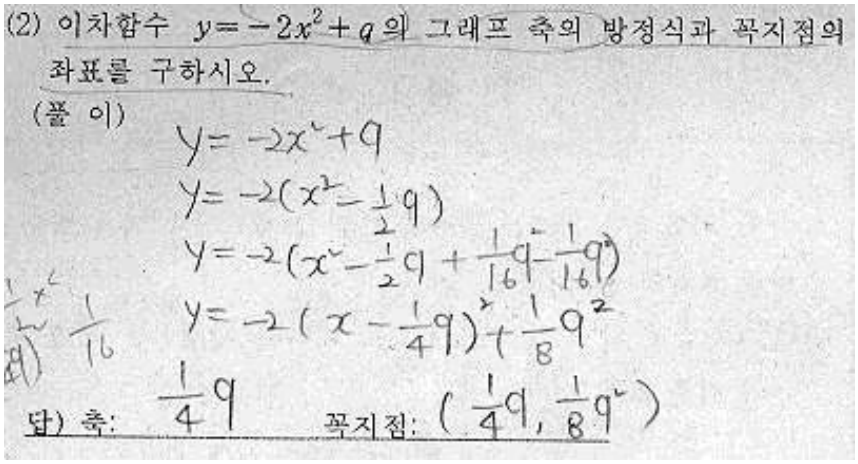
< protocol-1 > **문항 20에서의 문제 풀이**



위의 오류 <protocol>**은 꼭지점의 좌표를 찾아 문제를 해결하려고 하였으나 문제에 주어지지 않고, 주어진 조건에 맞지 않는 정보를 학생 편의 데로 잘못 사용한 오류이다.**

A2) **풀이에 필요한 주어진 자료를 무시하고 임의로 관련이 없는 자료를 보탬으로써 정보의 부족을 보충하는 경우**

< protocol-2 > **문항 6(2)에서의 문제 풀이**


(2) 이차함수 $y=-2x^2+q$의 그래프 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구하시오.

(풀 이)

$y=-2x^2+q$

$y=-2(x^2-\frac{1}{2}q)$

$y=-2(x^2-\frac{1}{2}q+\frac{1}{16}q^2-\frac{1}{16}q^2)$

$y=-2(x-\frac{1}{4}q)^2+\frac{1}{8}q^2$

답) 축: $\frac{1}{4}q$ 꼭지점: $(\frac{1}{4}q, \frac{1}{8}q^2)$

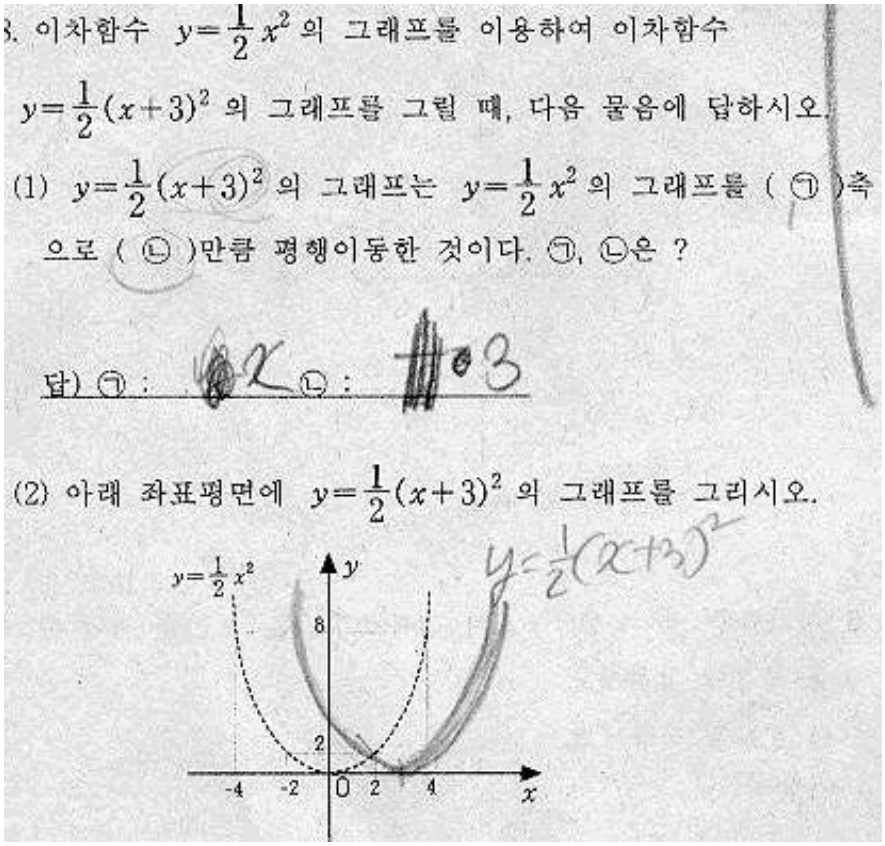
위의 오류 <protocol>**은 이차함수** $y = -2x^2 + q$ **의 그래프는 이차함수의 표준형인** $y = a(x - p)^2 + q$ **꼴에서** $p = 0$ **인 형태임을 알지 못하는 경우로서 문제에 주어진 자료를 무시하고, 임의로 관련이 없는 자료를 억지로 보탬으로써 정보의 부족을 보충하는 경우이다.**

2. **문제의 내용을 잘못 해석하는 오류**(B**형**)

한 상징적인 언어 안에 표현되어 있는 수학적 사실들을 다른 상징적인 언어로 잘못 해석하는 오류로 세부 내용은 다음과 같다.

B1) **수학적인 기호나 용어를 그래프로 나타낼 때의 오류**

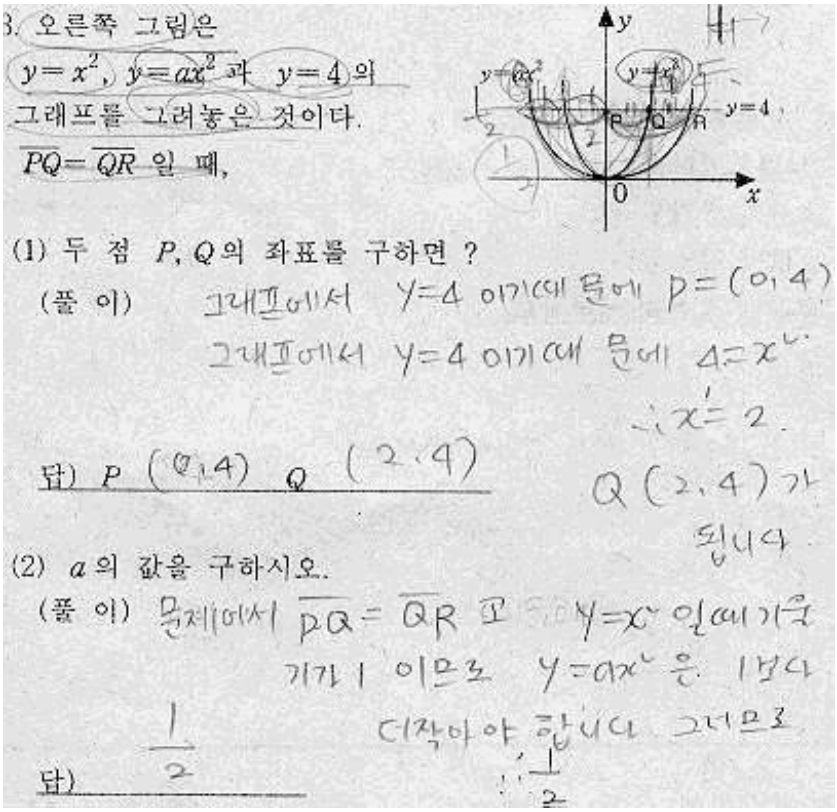
< protocol-3 > **문항 8에서의 문제 풀이**



위의 오류 <protocol>**은 평행이동에 있어서 대수식에서 그래프로 나타내는 과정에서의 오류로** *x* **축으로 평행이동될 때 부호에 대한 오류이다.**

B2) **그래프에 나타난 정보를 잘못 해석하는 오류**

< protocol-4 > **문항 3에서의 문제 풀이**


3. 오른쪽 그림은
$y=x^2$, $y=ax^2$ 과 $y=4$ 의
그래프를 그려놓은 것이다.
$\overline{PQ}=\overline{QR}$ 일 때,

(1) 두 점 P, Q 의 좌표를 구하면 ?

(풀 이) 그래프에서 $y=4$ 이기에 문에 $P=(0,4)$
그래프에서 $y=4$ 이기에 문에 $4=x^2$
$\therefore x=2$.

답) $P\ (0,4)$ $Q\ (2,4)$ $Q(2,4)$가 됩니다.

(2) a 의 값을 구하시오.

(풀 이) 문제에서 $\overline{PQ}=\overline{QR}$ 고 $y=x^2$ 인데 기울기가 1 이므로 $y=ax^2$ 은 1보다 더작아야 합니다 그러므로 $\frac{1}{2}$

답) $\frac{1}{2}$

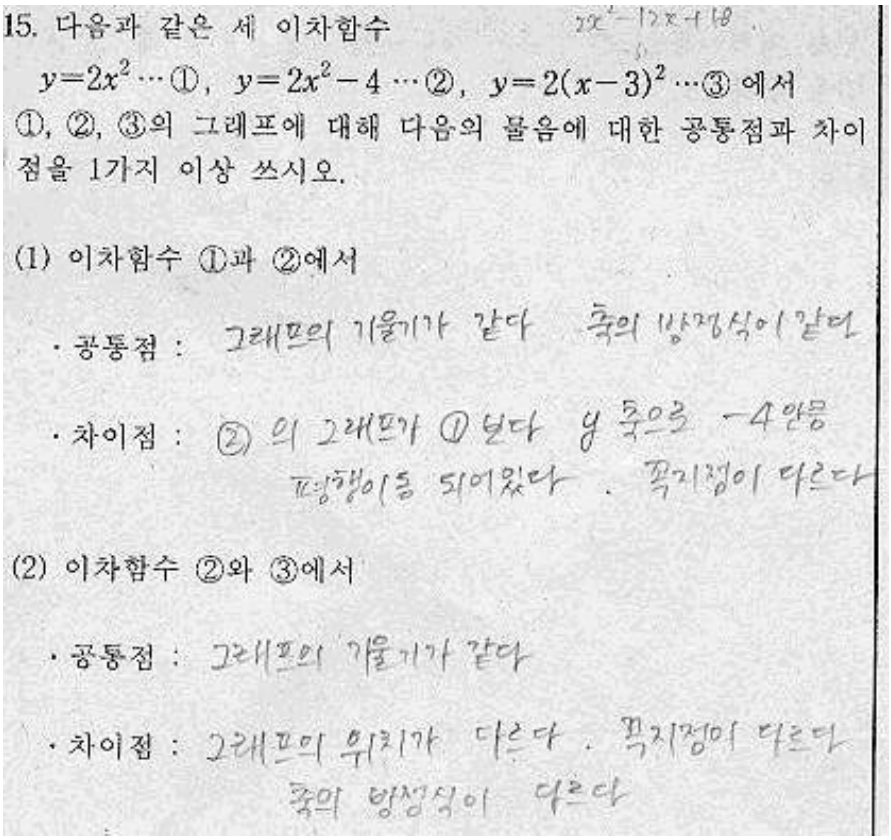
위의 오류 <protocol>**은 포물선의 폭이** 2**배이면 이차항의 계수가** $\frac{1}{2}$ **이 된다고 잘못 이해한 것으로 그래프에 나타난 정보를 잘못 해석하는 오류이다.**

3. 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류(C형)

이 범주는 특정하고 동일한 규칙, 원칙, 정리 혹은 정의 등이 잘못 이해되어 쓰여지는 경우이다. 세부내용은 다음과 같다.

C1) **이차 함수의 그래프와 관련된 용어에 대한 개념의 이해 부족으로 인한 것**

< protocol-5 > **문항 15에서의 문제 풀이**



15. 다음과 같은 세 이차함수

$y=2x^2 \cdots ①$, $y=2x^2-4 \cdots ②$, $y=2(x-3)^2 \cdots ③$ 에서

①, ②, ③의 그래프에 대해 다음의 물음에 대한 공통점과 차이점을 1가지 이상 쓰시오.

(1) 이차함수 ①과 ②에서

· 공통점 : 그래프의 기울기가 같다 축의 방정식이 같다

· 차이점 : ②의 그래프가 ①보다 y축으로 −4만큼 평행이동 되어있다. 꼭지점이 다르다

(2) 이차함수 ②와 ③에서

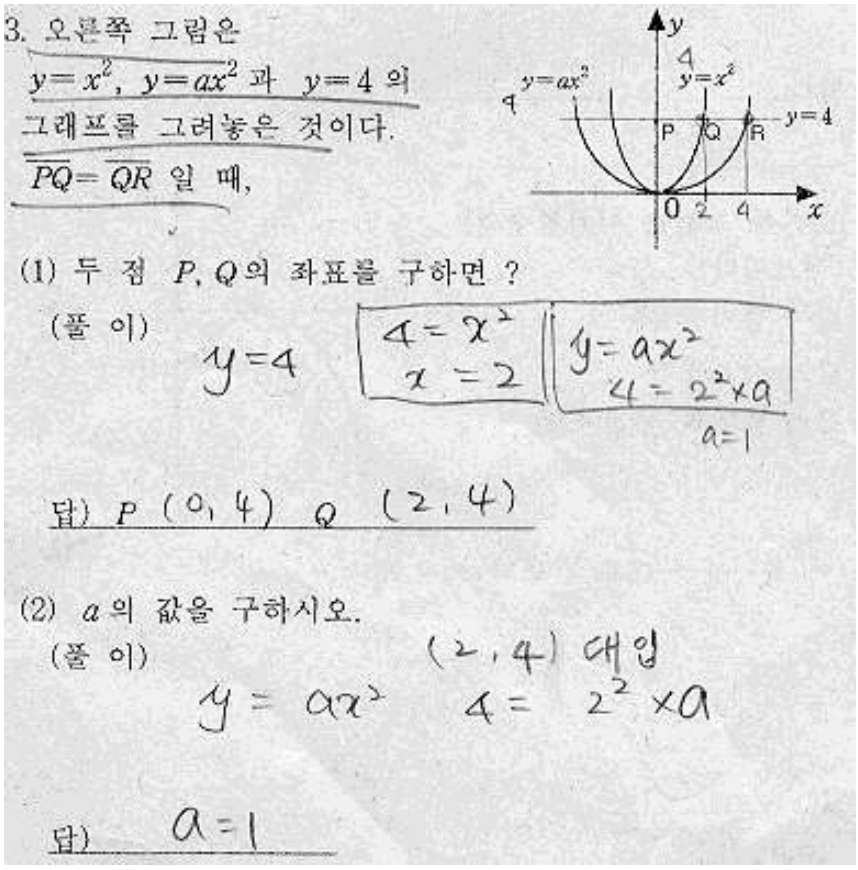
· 공통점 : 그래프의 기울기가 같다

· 차이점 : 그래프의 위치가 다르다. 꼭지점이 다르다 축의 방정식이 다르다

위의 오류 <protocol>은 일차항의 계수(기울기)와 이차항의 계수에 대한 이해의 부족 즉, 용어의 정의의 이해 부족으로 생긴 오류이다.

C2) **좌표에 대한 이해 부족으로 인한 오류**

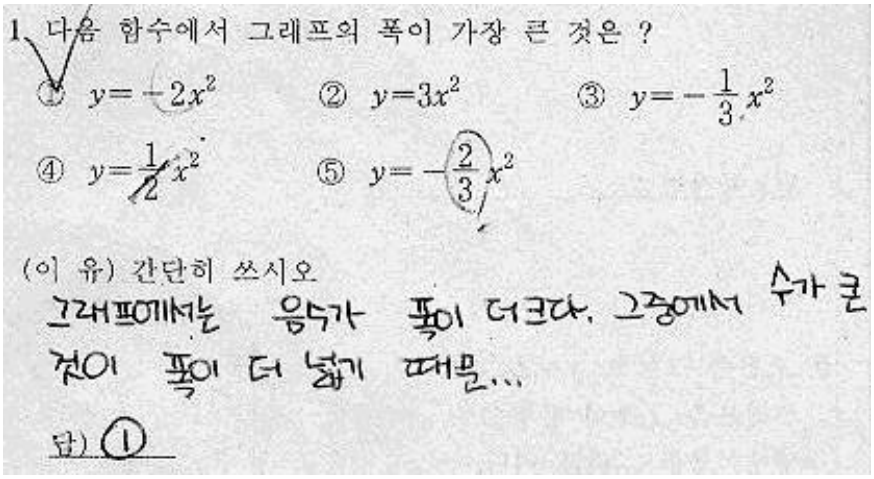
< protocol-6 > **문항 3에서의 문제 풀이**



위의 오류 <protocol>은 그래프가 지나는 점의 좌표만이 그 식을 만족한다는 것에 대한 오류로 좌표평면 위의 점의 위치는 함수의 관계식에 의해 결정된다는 것을 정확히 알지 못하는 데서 생기는 오류이다. 즉, 좌표에 대한 이해 부족으로 나타나는 오류이다.

C3) **원리나 법칙을 잘못 이해하는 경우**

< protocol-7 > **문항 1에서의 문제 풀이**


1. 다음 함수에서 그래프의 폭이 가장 큰 것은 ?

① $y=-2x^2$ ② $y=3x^2$ ③ $y=-\frac{1}{3}x^2$

④ $y=\frac{1}{2}x^2$ ⑤ $y=-\frac{2}{3}x^2$

(이 유) 간단히 쓰시오

그래프에서는 음수가 폭이 더크다. 그중에서 수가 큰 것이 폭이 더 넓기 때문...

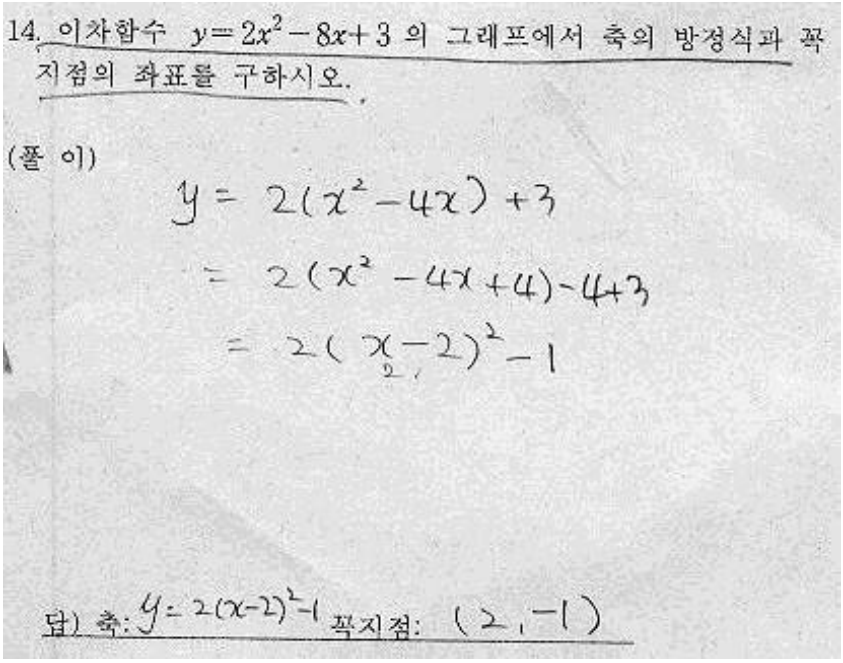
답) ①

위의 오류 <protocol>은 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프에서 이차항의 계수 a 의 절대값이 클수록 그래프의 폭이 작아진다는 정리를 잘못 적용한 오류로 원리나 법칙을 정확히 알지 못하는 데서 생기는 오류이다.

4. 기술적인 오류(D형)

완전제곱꼴로 고치거나 x, y 값을 대입하여 계산할 때 발생하는 오류

< protocol -8 > 문제 14에서의 문제 풀이


14. 이차함수 $y=2x^2-8x+3$ 의 그래프에서 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구하시오.

(풀 이)

$y = 2(x^2-4x)+3$

$= 2(x^2-4x+4)-4+3$

$= 2(x-2)^2-1$

답) 축: $y=2(x-2)^2-1$ 꼭지점: $(2,-1)$

위의 오류 <protocol>은 이차함수의 일반형 $y = ax^2 + bx + c$ 꼴을 이차함수의 표준형 $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴로 고치는 과정에서 괄호 안의 값을 처리하는 데 있어서 계산오류이다.

B. 결과 및 논의

1. 연구문제 1

연구문제1 : 학습능력(상, 중, 하)에 따른 중학교 3학년 학생들의 이차함수의 그래프 영역에서 발생하는 오류유형을 분석한다.

a) $y = ax^2$ **꼴의 그래프에서의 오류**

<표Ⅳ-1> 그래프 유형별 정답율 및 오류 빈도표

오류모델 / 그래프유형	정 답 율 (%)		A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	계
$y = ax^2$꼴의 그래프	상	82.4	1 0.7	6 4.4	13 9.5	0 0.0	20 14.6
	중	55.3	5 3.6	15 10.9	24 17.5	3 2.2	47 32.1
	하	35.7	7 5.1	20 14.6	38 27.7	5 3.6	70 47.4
	계 (%)	57.8	13 9.5	41 29.9	75 54.7	8 5.8	137

<표Ⅳ-1>에서 보는 바와 같이, $y = ax^2$꼴의 그래프에 대한 학생들의 학습 능력의 수준에 따라 문항 분석을 하면 정답율은 상이 82.4%, 중이 55.3%, 하는 35.7%로 나타났다. 오류는 상이 14.6%이고 그 중 C모델이 9.5%, 중은 32.1%이고 그 중 C모델이 17.5%, 하는 47.4%이고 그 중 C모델이 27.7%로 나타났다.

b) $y = ax^2 + q$ **꼴의 그래프에서의 오류**

<표Ⅳ-2> 그래프 유형별 정답율 및 오류 빈도표

오류모델 / 그래프유형	정 답 율 (%)		A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	계
$y = ax^2 + q$ 꼴의 그래프	상	76.8	8 4.1	6 3.1	15 7.8	8 4.1	37 19.2
	중	51.6	17 8.8	18 9.3	26 13.5	10 5.2	71 36.8
	하	32.1	20 10.4	23 11.9	30 15.5	12 6.2	85 44.0
	계 (%)	53.5	45 23.3	47 24.4	71 36.8	30 15.5	193

<표Ⅳ-2>에서 보는 바와 같이, $y = ax^2 + q$ 꼴의 그래프에 대한 학생들의 학습능력의 수준에 따라 문항 분석을 하면 정답율은 상이 76.8%, 중이 51.6%, 하는 32.1%로 나타났다. 오류는 상이 19.2%이고 그 중 C모델이 7.8%, 중은 36.8%이고 그 중 C모델이 13.5%, 하는 44.0%이고 그 중 C모델이 15.5%로 나타났다.

c) $y = a(x - p)^2$ 꼴의 그래프에서의 오류

<표Ⅳ-3> 그래프 유형별 정답율 및 오류 빈도표

오류모델 / 그래프유형	정 답 율 (%)		A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	계
$y = a(x - p)^2$ 꼴의 그래프	상	70.0	6 2.8	12 5.7	17 8.1	0 0.0	35 16.6
	중	48.4	22 10.4	30 14.2	25 11.8	0 0.0	77 36.5
	하	29.6	25 11.8	42 19.9	32 15.2	0 0.0	99 46.9
	계 (%)	49.3	53 25.1	84 39.8	74 35.1	0 0.0	211

<표Ⅳ-3>에서 보는 바와 같이, $y = a(x - p)^2$ 꼴의 그래프에 대한 학생들의 학습능력의 수준에 따라 문항 분석을 하면 정답율은 상이 70.0%, 중이 48.4%, 하는 29.6%로 나타났다. 오류는 상이 16.6%이고 그 중 C모델이 8.1%, 중은 36.5%이고 그 중 B모델이 14.2%, 하는 46.9%이고 그 중 B모델이 19.9%로 나타났다.

d) $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴의 그래프에서의 오류

<표Ⅳ-4> 그래프 유형별 정답율 및 오류 빈도표

오류모델 / 그래프유형	정 답 율 (%)		A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	계
$y = a(x - p)^2 + q$ 꼴의 그래프	상	64.3	10 4.3	15 6.5	21 9.1	0 0.0	46 19.9
	중	42.9	23 10.0	28 12.1	36 15.6	0 0.0	87 37.7
	하	26.7	26 11.3	30 13.0	42 18.2	0 0.0	98 42.4
	계 (%)	44.6	59 25.5	73 31.6	99 42.9	0 0.0	231

<표Ⅳ-4>에서 보는 바와 같이, $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴의 그래프에 대한 학생들의 학습능력의 수준에 따라 문항 분석을 하면 정답율은 상이 64.3%, 중이 42.9%, 하는 26.7%로 나타났다. 오류는 상이 19.9%이고 그 중 C모델이 9.1%, 중은 37.7%이고 그 중 C모델이 15.6%, 하는 42.4%이고 그 중 C모델이 18.2%로 나타났다.

e) $y = ax^2 + bx + c$ 꼴의 그래프에서의 오류

<표Ⅳ-5> 그래프 유형별 정답율 및 오류 빈도표

오류모델 / 그래프유형	정 답 율 (%)		A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	계
$y = ax^2 + bx + c$ 꼴의 그래프	상	35.4	13 6.9	18 9.6	12 6.4	12 6.4	55 29.3
	중	21.6	15 8.0	24 12.8	18 9.6	30 16.0	87 46.3
	하	17.2	10 5.3	12 6.4	6 3.2	18 9.6	46 24.5
	계 (%)	24.7	38 20.2	54 28.7	36 19.1	60 31.9	188

<표Ⅳ-5>에서 보는 바와 같이, $y = ax^2 + bx + c$ 꼴의 그래프에 대한 학생들의 학습능력의 수준에 따라 문항 분석을 하면 정답율은 상이 35.4%, 중이 21.6, 하는 17.2%로 나타났다. 오류는 상이 29.3이고 그 중 B모델이 9.6%, 중은 46.3%이고 그 중 B모델이 12.8%, 하는 24.5%이고 그 중 B모델이 6.4%로 나타났다.

이상에서 보면 전반적으로 학생들은 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류와 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류가 가장 많고 기술적인 숙련의 부족에서 오는 오류도 흔히 범하게 되는 오류임을 알 수 있다.

수준이 낮은 학생들에 있어서는 문제 풀이 과정에서 다음 단계가 잘 추론되지 않아 풀이과정을 더 이상 계속하지 못하는 경우도 많았다. 실제로 시험지의 분석결과 낮은 수준에 있어서 풀이 과정을 중도에 포기하거나 문제 풀이에 대한 자신이 없어 임의의 답만을 제시한 경우, 혹은 아예 답을 쓰지 않은 경

우가 빈번하다. 학생들의 수준과 오류모델에 따른 빈도수를 살펴보면 다음 <표Ⅳ-6>과 같다.

<표Ⅳ-6> 오류모델에 따른 학습 수준별 오류빈도표

학습 수준 / 오류모델	상	중	하	계
문제의 자료를 잘못 사용하는 오류	38 (19.7%)	82 (22.2%)	88 (22.1%)	208 (21.7%)
문제의 내용을 잘못 해석하는 오류	57 (29.5%)	115 (31.2%)	127 (31.9%)	299 (31.1%)
정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류	78 (40.4%)	129 (35.0%)	148 (37.2%)	355 (37.0%)
기술적인 오류	20 (10.4%)	43 (11.7%)	35 (8.8%)	98 (10.2%)
계	193	369	398	960

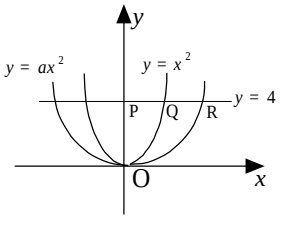
2. 연구문제 2

연구문제 2 : 각각의 그래프유형에 따른 오류유형에 대한 오류의 원인을 분석하여 그 개선책을 알아본다.

a) $y = ax^2$ 꼴의 그래프에서의 오류

(1) 상 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 3의 (2) : 오른쪽 그림은 $y = x^2$, $y = ax^2$ 과 $y = 4$ 의 그래프를 그려놓은 것이다.



$\overline{PQ} = \overline{QR}$ 일 때, a 의 값을 구하시오.

(오류1) $y = ax^2$에 (2, 4) 대입하면 $4 = a \times 2^2$

$\therefore \ a = 1$

[학생] $y = 4$일 때, $x^2 = 4$ 에서 $x = 2$이므로 점 (2, 4)를 $y = ax^2$에 대입합 니다.

(오류2) 점 R은 $(x, 4)$인데 $\overline{PQ} = 2$ 이고 $\overline{QR}$과 같으므로 $\overline{PR} = 4$이다.

(4, 4)를 $y = ax^2$에 대입하여 $4 = a \times 4$

[학생] (4, 4)를 $y = ax^2$에 대입합니다.

[오류원인] $y = ax^2$의 그래프가 지나는 점의 좌표만이 그 식을 만족한다는 것에 대한 오류로 좌표평면 위의 점의 위치는 함수의 관계식에 의해 결정된다는 것을 정확히 알지 못하는 데서 생기는 오류이다. 또한 좌표를 대입하여 계산할 때 성급하게 계산하는 데서 오류가 발생하였다.

[개선책] 좌표평면 위의 점은 함수의 관계식에 의해 결정됨을 예를 들어 설명하고 $y = ax^2$에서 매개변수 a를 구하기 위해서는 $y = ax^2$이 지나는 한 점의 좌표를 구하여 대입함을 강조한다. 또한 거듭제곱을 계산할 때는 괄호를 쳐서 좌표값을 대입하고 지수를 제일 먼저 계산하여 구하게 한다.

(2) 중 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 1 : 다음 함수에서 그래프의 폭이 가장 큰 것은 ?

① $y = -2x^2$ ② $y = 3x^2$ ③ $y = -\frac{1}{3}x^2$

④ $y = \frac{1}{2}x^2$ ⑤ $y = -\frac{2}{3}x^2$

(오류1) 양·음수에 관계없이 a의 절대값이 가장 큰 수가 그래프의 폭이 넓다.

[학생] 이차항의 계수 a의 절대값이 클수록 폭이 넓다고 생각합니다.

(오류2) 기울기가 양수나 음수에 관련 없이 무조건 큰 수의 기울기가 가장 크다.

[학생] 이차항의 계수 a가 기울기이고, 절대값이 클수록 기울기가 크므로 y 축에 가깝지 않습니까?

[오류원인] 「$y = x$에 관한 식」에서 최고차 항의 계수를 기울기라고 2학년 때 배운 내용을 그대로 생각하고서 이차항의 계수 a를 기울기로 정의를 잘못 알고 있다. $y = ax^2$의 그래프에서 a의 절대값의 크기에 따라 그래프의 폭이 달라진다는 정리를 잘못 적용한 오류이다

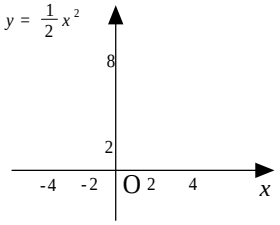
[개선책] 모눈종이 위에서 하나의 좌표평면에 $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$에 대해 x 좌표값 2일 때, 각각 y 좌표값을 찾아 점을 찍어 봄으로써 이차항의 계수의 절대값이 클수록 y 축에 가깝게 그려짐을 경험하게 한다. 또는 컴퓨터(그래픽 계산기, GSP 등)를 사용하여 $y = ax^2$에서 a 값의 변화에 따른 그래프의 모양을 시각화하여 이해할 수 있게 한다.

$y = 2x$ (일차함수)와 $y = 2x^2$ (이차함수)에서 대응표를 사용하여 실제 나타내 보게 함으로써 $y = 2x$는 x 값의 변화에 대한 y 값의 변화의 비는 x에 비례하며 2로 일정하고, $y = 2x^2$은 x 값의 변화에 대한 y 값의 변화의 비는 x^2에 비례하며 2로 일정함을 비교하여 이해함으로써 일차항과 이차항의 계수를 구별해서 알 수 있게 한다.

(3) **하 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책**

문항 4 : $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를** x **축에 대하여 대칭이동 시킨 함수의 식을 쓰고 그래프를 그리시오.**

(오류1) 식 : $y = -\frac{1}{2}x^2$



[학생] $y = -\frac{1}{2}x^2$ **의 그래프는** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프보다 이차항의 계수가 작으므로 폭이 넓은 것이 아닙니까?**

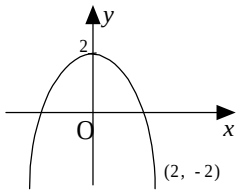
[오류원인] 대칭의 의미를 정확히 모르고 있기 때문에 대수식인 $y = -\frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 나타내는데 있어서의 오류 즉, 수학적인 식을 그래프로 나타낼 때의 오류이다.**

[개선책] 모눈종이를 사용하여 좌표평면 위에 $x = 2$ **일 때,** $y = \frac{1}{2}x^2$ **과** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **의** y **좌표값의 점을 찍어** x **축에 대칭이 됨을 알게하고고,** $y = \frac{1}{2}x^2$ **과** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 그려** x **축을 중심으로 접었을 때 겹쳐짐을 확인시킨다.** $y = ax^2$ **의 그래프를** x **축에 대칭이동시킨 함수는** $y = -ax^2$ **이며 그 그래프도 이해 할 수 있게 한다.**

b) $y = ax^2 + q$ **꼴의 그래프에서의 오류**

(1) **상 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책**

문항 7 : 오른쪽 포물선을 나타내는 이차함수를 구하시오



(오류1) $y = ax^2 + bx + c$ **에서** $(0, 2)$ **대입** $c = 2$

$(2, -2)$ **대입** $-2 = 4a + 2b + 2 \cdots ①$

$(-2, 2)$ **대입** $-2 = 4a - 2b + 2 \cdots ②$ **에서 ①, ②를 연립하여 풀면**

$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 1$

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

[학생] 모든 포물선의 식은 일반형이 $y = ax^2 + bx + c$ **입니다. 여기서 세 점을 대입하여** a, b, c **를 구하면 안됩니까?**

[오류원인] 꼭지점 $(0, 2)$**인 포물선의 식은** $y = ax^2 + q$ **에서** a, q **를 구해야 쉽다. 그러나** $y = ax^2 + bx + c$ **에서** a, b, c **를 구하고 있으므로 복잡 해 졌다. 또한 연립방정식의 풀이에서 계산상 오류이다.**

(오류2) $y = ax^2 + bx + c$ **에서** $(0, 2)$ **대입** $c = 2$

$(2, 0)$ **대입** $0 = 4a + 2b + 2 \cdots ①$

$(-2, 0)$ **대입** $0 = 4a - 2b + 2 \cdots ②$ **에서 ①, ②를 연립해서 풀면**

$a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 2$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

[학생] 포물선의 일반형 $y = ax^2 + bx + c$ **에서** $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$**를 지나므로 대입하여 연립방정식을 풀면 안됩니까?**

[오류원인] 주어진 그래프가 (2, 0), (-2, 0)는 지나지 않는다. 그래프에 나타난 성격을 잘못 해석하는 오류이다.

[개선책] 꼭지점이 $(0, q)$ 인 포물선의 식은 $y = ax^2 + q$ 에서 a, q 를 구하여 포물선의 식을 구한다는 것을 지도한다. 즉 포물선의 그래프는 꼭지점을 중심으로 생각할 수 있게 한다. 또한 그래프가 지나는 점의 좌표를 정확하게 구하여 지나는 그래프의 식에 대입함으로써 매개변수를 구할 수 있게 한다.

(2) 중 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 6번 : 이차함수 $y = -2x^2 + q$ 의 그래프가 $(2, -1)$를 지날 때, q 값을 구하시오.

(오류) $-1 = -4^2 + q \Rightarrow -1 = 16 + q \Rightarrow -1 - 16 = q$

$\therefore q = -17$

[학생] $y = -2x^2 + q$ 에 (2, -1)을 대입하여 q 를 구합니다.

[오류원인] 한 점의 좌표를 대입하여 계산할 때, 거듭제곱의 계산을 잘못 계산하는 계산오류에 속한다.

[개선책] $y = -2x^2 + q$ 가 지나는 점의 좌표 (2, -1)을 대입 할 때는 괄호를 쳐서 $(-1) = -2 \times (2)^2 + q$ 로 거듭제곱(지수)부터 항상 먼저 계산하며 이항할 때 부호도 조심하게 한다.

(3) 하 수준의 학생들에서의 오류원인

문항 5번 : (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 (㉠)축으로 (㉡)만큼 평행이동한 것이다. ㉠, ㉡은 ?

(오류1) 답) ㉠ : x ㉡ : $-\frac{3}{2}$

[학생] 이차항의 계수가 1이 되야 될 것 같고, 상수항만큼 평행이동 시킨 것 아닙니까?

(오류2) 답) ㉠ : x ㉡ : -3

[학생] x 축으로 -3 만큼인지, y 축으로 -3 만큼인지 잘 모르겠습니다.

[오류원인] $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)$과 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ 을 정확히 구별하지 못하는 데서 생기는 오류로 $y=ax^2$ 을 y 축으로 q 만큼 평행이동한 식이 $y=ax^2+q$ 라는 정리를 잘 모르며 잘못 적용한 오류이다.

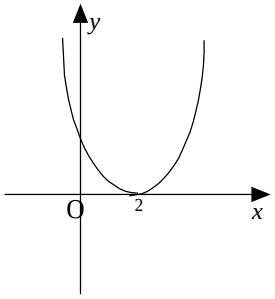
[개선책] 같은 x 값에 대해 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ 의 y 값은 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 y 값 보다 항상 3만큼 작다. 또한 이차항의 계수가 같으면 평행이동된 것이며 꼭지점을 중심으로 해석하게 한다. 즉 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ 의 꼭지점 $(0,\ 0)$, $(0,\ -3)$을 비교하여 구할 수도 있다.

$y=ax^2+q$ 꼴의 그래프는 $y=ax^2$ 의 그래프를 y 축으로 q 만큼 평행이동한 그래프임을 알게 한다.

c) $y=a(x-p)^2$ 꼴의 그래프에서의 오류

(1) 상 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 10번 : 오른쪽 그림은 $y = 2x^2$ **의 그래프를** x **축의 방향으로 평행이동한 그래프이다. 평행이동된 포물선의 식을 구하시오.**



(오류1) $y = a(x - p)^2 + q$ **에서** $y = 2(x - p)^2 + q$ **에** $(2, 0)$ **대입**

$0 = 2(2 - p)^2 + q$ **에서** $0 = 2(4 - 4p + p^2) + q$

$8 - 8p + 2p^2 + q = 0$ …

[학생] 포물선을 $y = a(x - p)^2 + q$ **에서** $(2, 0)$**지나므로 대입하면....**

[오류원인] 꼭지점이 (p, q) **인 포물선의 식이** $y = a(x - p)^2 + q$ **이다. 따라서** $y = a(x - p)^2 + q$ **의 식을 이용할 때는 꼭지점이 중심이 되어야 하는 데 그렇지 못한 데서 생긴 오류이다.**

(오류 2) x **축 방향으로** 2**만큼 평행이동 했으니까**

$y = 2x^2 - 2$

[학생] $y = 2x^2$ **을** x **축 방향으로** 2**만큼 평행이동 하면** $y = 2x^2 - 2$**라 생각됩니다.**

[오류원인] $y = 2x^2$ **을** x **축으로** 2**만큼 또는** y **축으로** 2**만큼 평행이동한 그래프의 식의 정리를 이해하지 못하는 데 있다.**

[개선책] $y = 2x^2$ **과** $y = 2(x - 2)^2$ **에서** y **값이** 2**일 때,** $y = 2x^2$ **은** $x = 3$ **,** $y = 2(x - 2)^2$ **은** $x = 1$ **이므로 두 점** $(1, 2)$, $(3, 2)$**를 비교하여** $y = 2(x - 2)^2$ **은** $y = 2x^2$ **을** x **축으로** 2**만큼 평행이동 된 것임을 알 게 한다.**

따라서 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프는 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼 평행이동한 그래프임을 이해하게 한다. 또한 꼭지점을 중심으로 해석하게 한다.

(2) 중 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 9번 : 이차함수 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = -2$ 일 때, 꼭지점의 좌표를 구하시오.

(오류1) $y = a(x - p)^2$ 에서 축 : $x = -p$ $\therefore$ $p = 2$

[학생] $y = a(x - p)^2$의 축은 $-p$ 아닌가요?

[오류원인] $y = a(x - p)^2$ 의 축의 방정식은 $x = p$ 인 데 $x = -p$ 라고 생각한 것은 부호에 대한 혼돈에서 오류가 발생한 것이다.

(오류2) $y = a(x - p)^2$에서 $\Rightarrow$ $y = a(x^2 - 2px + p^2)$

$= ax^2 - 2px + ap^2$

[학생] $y = a(x - p)^2$ 에서 전개하여 어떻게 해보면…

[오류원인] $y = a(x - p)^2$의 꼭지점이 $(p, 0)$ 이므로 그래프를 그려봄으로써 a 값에 관계없이 축의 방정식은 $x = p$ 임을 알 수 있으나 $y = a(x - p)^2 + q$ 에서 p, q 값을 억지로 구하려는 데서 생긴 오류이다.

[개선책] $y = 2(x - 2)^2$, $y = -(x + 3)^2$의 꼭지점을 찾아 그래프를 그려 보게 하여 축의 방정식은 이차항의 계수에 관계없이 y 축에 평행하며 「$x =$ 꼭지점의 x 좌표값」임을 알게 한다.

따라서 $y = a(x - p)^2$의 꼭지점은 $(p, 0)$, 축은 $x = p$ 임을 알게 한다. 또한 꼭지점을 중심으로 지도한다.

(3) 하 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항8번 : 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ 의 그래프를 그릴 때, 다음 물음에 답하시오.

(오류 1) $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 (㉠)축으로 (㉡)만큼 평행이동한 것이다. ㉠, ㉡은 ?

답) ㉠ : x ㉡ : 3

[학생] $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 3만큼 평행이동 한 것 아닙니까?

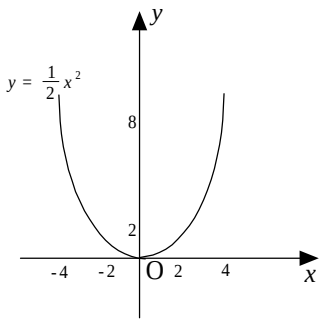
(오류 2) 아래 좌표평면에 $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ 의 그래프를 그리시오.

$y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$

$y = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9)$

$y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 9$ **에서**

y 축 방향으로 9만큼 평행이동하였다.



[학생] 전개하여 상수항만큼 y 축으로 평행이동 한 것 아닌가요?

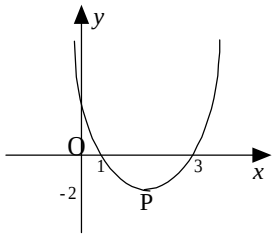
[오류원인] x 축으로 평행이동 시킨 식에서 부호를 잘못 생각한 데서 오는 오류이고,「y 축으로 평행이동 시킨 식은 상수항이다」라고 잘못 알고 있는 데서 오는 오류이며 $y = ax^2 + q$ 꼴과의 혼돈에서 오는 오류이다.

[개선책] 이차항의 계수가 같으면 평행이동된 것이며 꼭지점의 좌표를 찾아 비교한다. 즉 $y = ax^2$ 의 그래프의 꼭지점은 (0, 0), $y = a(x - p)^2$ 의 그래프의 꼭지점은 $(p, 0)$이므로 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프는 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축으로 p 만큼 평행이동시킨 그래프임을 알게 지도한다.

d) $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴의 그래프에서의 오류

(1) 상 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 16번 : 오른쪽 포물선을 나타내는 이차함수를 구하시오 (단, 점 P는 꼭지점)



(오류 1) $y = a(x - 1)(x - 3)$

$y = a(x^2 - 4x + 3)$ 에서 $y = ax^2 - 4ax + 3a$ 에 (1, 0)대입하면

$\therefore a = 1$

$\therefore y = x^2 - 4x + 3$

[학생] x 절편이 1, 3인 포물선의 식은 $y = a(x - 1)(x - 3)$ 이고, (1, 0)을 지나므로 대입했습니다.

[오류원인] x 절편을 이용하여 이차함수의 식을 구할 때 x 절편을 대입하면 항등식이 됨에도 억지로 매개변수를 구하려고 하는 데서 생긴 오류이다.

꼭지점이 (p, q) 인 포물선의 식이 $y = a(x - p)^2 + q$ 라는 성질을 이해 못하고 있으며 포물선에서 축의 성질인 대칭성을 이용하여 꼭지

점을 중심으로 생각하지 못한 데서 생긴 오류와 계산상의 오류이다.

(오류2) $y = a(x - 2)^2 - 2$ 에 (1, 0) 대입하면

$0 = 3a - 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$\therefore y = \frac{2}{3}(x - 2)^2 - 2$

[학생] 꼭지점이 $(2, -2)$ 이므로 $y = a(x - 2)^2 - 2$ 에 (1, 0)를 대입하여 a 를 구하면 …

[오류원인] (1, 0) 대입하여 계산할 때, 너무 성급히 계산하는 데서 계산상의 오류가 발생했다.

[개선책] 꼭지점이 (p, q)인 모든 포물선은 $y = a(x - p)^2 + q$ 이므로 모든 포물선의 식은 꼭지점의 좌표가 무엇인가부터 먼저 생각하고 꼭지점이외의 한 점의 좌표를 대입하거나 이차항의 계수와 관련된 성질을 이용하여 이차항의 계수를 구한다.

(2) 중 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 15번 : 다음과 같은 세 이차함수

$y = 2x^2 \cdots ①$, $y = 2x^2 - 4 \cdots ②$, $y = 2(x - 3)^2 \cdots ③$ 에서

①, ②, ③의 그래프에 대해 다음의 물음에 대한 공통점과 차이점을 1가지 이상 쓰시오.

(오류 1) 이차함수 ①과 ②에서

· 공통점 : 기울기가 같다. 또는 그래프의 기울기나 모양이 같다.

· 차이점 : y 절편이 다르다. 또는 꼭지점이 다르다. y 축으로 4만큼 평행이동.

[학생] x 의 식에서 맨 앞의 계수는 기울기라 생각하고 …

[오류원인] 2학년 때 배운 일차함수 $y = ax + b$ 에서 기울기 a 를 이차함수 $y = ax^2$ 에서의 a 와 혼돈하는 경우로 이차함수에 대한 정의를 정확히 모르는 데서 오는 오류이다.

[개선책] $y = 2x$ 와 $y = 2x^2$ 의 대응표를 만들고 그래프를 그려 비교함으로써 일차함수와 이차함수의 정의의 차이점을 정확히 알게 하고 일차항의 계수와 이차항의 계수에 대한 각각의 성질을 알게 한다.

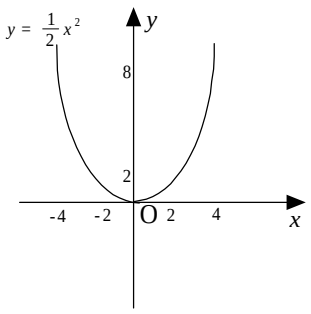
(3) 하 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 13번 : 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ 의 그래프를 그릴 때, 다음 물음에 답하시오.

$y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 (㉠)축으로 (㉡)만큼, (㉢)축으로 (㉣)만큼 각각 평행이동 한 그래프이다. ㉠, ㉡, ㉢, ㉣은 ?

(오류1) x 축으로 2만큼, y 축으로 3만큼 평행이동.

(오류2) x 축으로 -2만큼, y 축으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동.



[학생] $(x+2)^2$ 에서 x 축으로 $+2$만큼 y 축으로 상수항만큼, 평행이동…

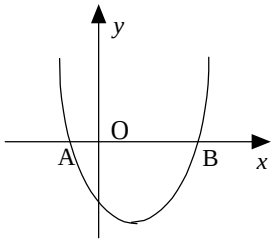
[오류원인] $y=a(x+p)^2+q$ 의 그래프는 $y=ax^2$ 의 그래프를 부호에 대해 생각하지 않고 x 축으로 p, y 축으로 상수항만큼 평행이동한 것으로 잘못 이해하였으며 암기식으로 문제를 푼 데서 오류가 발생하였다. 즉 평행이동에 대한 정리를 모르는데서 오는 오류이다.

[개선책] 이차항의 계수가 같으면 평행이동이고 꼭지점의 좌표를 비교하여 x 축, y 축으로 얼마만큼 평행이동된 것인가를 알게 한다. 즉 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ 에서 이차항의 계수는 같고, 꼭지점은 각각 $(0,\ 0)$, $(-2,\ 3)$ 이므로 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ 의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 -2, y 축으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

e) $y=ax^2+bx+c$ 꼴의 그래프에서의 오류

(1) 상 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 20번 : 오른쪽 그림의 포물선 $y=x^2-4x+k$ 에서 $\overline{AB}=6$ 일 때, k의 값을 구하시오.



(오류 1) $y=x^2-4x+k$ 에서 $y=(x-2)^2-4+k$ 에서 $-4+k=6$

$\therefore\ k=10$

[오류원인] 그래프에서 주어진 자료에 없는 것은 있는 것처럼 이용하는 자료의 오용에 대한 오류이다.

[개선책] 함수의 관계식에서 1개의 매개변수를 구할 때는 함수가 지나는

한 점의 좌표만을 구해 대입함으로써 수 있음을 알게 한다. 위의 문제도 포물선의 축의 대칭성을 이용하여 한 점의 좌표 (4, 0)을 대입하여 k 값을 구한다.

(2) 중 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 19번 : 다음 물음에 답하시오.

(1) 아래 좌표평면에 이차함수 $y = -3x^2 + 6x - 1$ 의 그래프를 그리시오.

(2) $y = -3x^2 + 6x - 1$ 의 그래프에서 x 값이 증가할 때, y 값도 증가하는 x 값의 범위를 구하시오.

(오류 1) $y = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \Rightarrow y = -3(x-1)^2 + 6$

$\therefore$ 꼭지점 : (1, 6)

$\therefore$ $x > 1$

[오류원인] 완전제곱꼴로 고칠 때 괄호안의 값을 처리하는데 있어서 계산상의 오류이다.

(오류 2) $y = -3(x^2 - 2x) - 1$

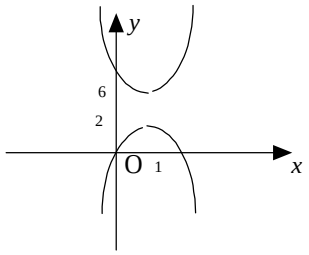
$y = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 1$

$y = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2$

$\therefore$ $y = -3(x-1)^2 + 2$

$\therefore$ 꼭지점 : (1, 2)

$\therefore$ $x > 0$



[오류원인] y 값이 증가한다는 것은 $y > 0$ 이라고 잘못 생각하는 오류이다. 즉, 그래프를 잘못 해석하는 오류이다.

[개선책] 함수에서 완전제곱꼴로 고칠 때는 이차항의 계수로 일차항까지 묶고 괄호 안에서 완전제곱이 되는 상수를 더하고 뺀 다음 정리한

다.

즉, $y = ax^2 + bx + c$ (이차함수의 일반형)꼴을 $y = a(x - p)^2 + q$ (이차함수의 표준형)으로 바꾸는 연습시킴으로써 오류를 줄일 수 있다. 또한 정의역 x 가 증가할 때 즉 왼쪽에서 오른쪽으로 변해갈 때 그래프가 어떻게 움직여 가는가를 관찰함으로서 치역(y 값)의 변화를 알게 한다.

(3) 하 수준의 학생들에서의 오류원인 및 개선책

문항 14번 : 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3$ 의 그래프에서 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구하시오.

(오류 1) $y = 2x^2 - 8x + 3 \Rightarrow y = 2(x^2 - 4x + 4) + 3 \Rightarrow y = 2(x - 2)^2 + 3$

∴ 꼭지점 $(2, 3)$

(오류 2) $y = 2(x^2 - 4x) + 3 \Rightarrow y = 2(x^2 - 4x + 4) - 4 + 3$

$y = 2(x - 2)^2 - 1$

∴ 꼭지점 $(2, -1)$

[오류원인] 원래의 식과 같게 되기 위해서는 괄호 안에서 더한 만큼 그대로 빼는 데 있어서의 오류이며 괄호 안의 값을 처리하는 데 있어서 계산상의 오류이다.

[개선책] $y = ax^2 + bx + c$ (이차함수의 일반형)꼴을 $y = a(x - p)^2 + q$ (이차함수의 표준형)으로 고칠 때,

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{b}x\right) + c \Rightarrow y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \Rightarrow$$

$y = \left(x + \frac{a}{2b}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$ 와 같은 형태로 바꾸는 연습을 시킴으로써 오류를 줄일 수 있다.

이상 학생들의 평가지에서 오류유형과 오류원인 및 개선책을 살펴보았다. 다음은 각 수준별로 이차함수의 그래프 영역에서 학생들이 저지르는 오류의 내용상 특징을 나열한 것으로써 현장에서 함수단원을 지도하기 전에 교사들이 참고 자료로 활용할 시 학생들의 오류를 최대한 줄이는데 도움이 되리라 본다.

첫 째 상 수준 학생들의 오류의 특징

(1) 축의 방정식을 이용한 그래프의 대칭성을 활용하지 못하는 경우가 많다.

(2) 모든 이차함수의 그래프는 이차항의 계수가 같을 때 그래프의 모양이 같다. 즉 '평행이동 된 것이다'라는 성질을 잘 이용하지 못하는 경우가 많았다.

(3) 이차함수의 표준형인 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼭지점 (p, q) 를 구하는 문제에 익숙한 나머지 $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$ 형태의 식에서는 $p = 0$, $q = 0$ 인 경우임을 알지 못하고 억지로 p, q 값을 구하려고 하는 경우가 많았다.

(4) 이차함수의 일반형인 $y = ax^2 + bx + c$ 은 이차함수의 표준형인 $y = a(x - p)^2 + q$ 와 같다는 사실을 잘 모르는 경우가 있다.

또, 이차함수 또는 포물선의 식을 구할 때 꼭지점을 알 수 있을 때 $y = a(x - p)^2 + q$ 에서 구하고, 그래프가 지나는 세 점을 알 수 있을 때는 $y = ax^2 + bx + c$ 에서 구한다는 사실을 잘 모르는 경우가 많다.

(5) 완전 제곱으로 변형할 때, 또는 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입할 때 계산상의 오류가 많다.

둘 째 중 수준 학생들의 오류 특징

(1) 이차함수에서 이차항의 계수가 그래프의 모양을 결정한다는 성질을 이해하는데 부족하다.

(2) 축의 방정식 $x = p$ 에서 대칭성과 그 p 가 꼭지점의 x 좌표가 된다는 사실을 잘 모르는 경우가 많다.

(3) 이차함수의 표준형인 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼭지점 (p, q) 를 구하는 문제에 익숙한 나머지 $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$ 형태의 식에서는 $p = 0$, $q = 0$ 인 경우임을 알지 못하고 억지로 p, q 값을 구하려고 하는 경우가 많았다.

(4) 평행이동에 대한 성질을 잘 이해 못하는 경우가 많으며 특히, x 축에 대해 평행이동한 그래프의 식을 구할 때 부호의 오류가 많다.

(5) 좌표평면상의 그래프를 이해하거나 좌표를 읽는 능력이 부족하다.

(6) 좌표의 값을 식에 대입하거나 완전제곱식으로 바꿀 때 괄호 처리와 계산상의 오류가 많다.

(7) 정의역의 값(x)이 변할 때, 치역의 값(y)의 변화에 대한 이해가 부족하다.

세 째 하 수준 학생들의 오류 특징

(1) 이차항의 계수값에 따른 그래프의 모양과의 관계를 잘 모르며 일차 함수의 기울기와 혼동하는 경우가 많다.

(2) 축 및 평행이동에 대한 이해가 부족하다.

(3) 평행 이동의 경우 부호의 오류가 많다.

(4) 좌표평면상의 그래프를 이해하거나 좌표를 읽는 능력이 부족하다.

⑸ 좌표의 값을 식에 대입하거나 완전제곱식으로 바꿀 때 괄호 처리와 계산상의 오류가 많다.

⑹ 정의역의 값(x)이 변할 때, 치역의 값(y)의 변화에 대한 이해가 부족하다.

위의 이차함수의 그래프에 대한 오류의 특징에 따른 개선책으로 다음과 같다.

첫 째 상 수준 학생들에 대한 개선책

⑴ 모든 이차함수의 그래프는 이차함수의 표준형($y = a(x - p)^2 + q$)꼴로 고쳐 그래프를 그릴 수 있게 하고 이차항의 계수와 축, 꼭지점에 대한 성질을 알 수 있게 한다.

⑵ 이차함수의 일반형($y = ax^2 + bx + c$)과 이차함수의 표준형($y = a(x - p)^2 + q$)과의 관계를 예를 들어 설명함으로써 알 수 있게 한다.

⑶ 이차항의 계수가 같은 모든 이차함수는 평행이동 된 것이며, 평행이동 된 그래프와 비교하게 함으로써 x 축으로 p, y 축으로 q 만큼 평행이동 시킨 함수의 식은 $x \rightarrow (x - p)$, $y \rightarrow (y - q)$ 로 대입하여 정리한다는 것을 알게 한다. 이 때, 부호는 평행이동 된 양과 반대임을 강조한다.

⑷ x 값이 증가할 때, y 값의 변화는 왼쪽에서 오른쪽 방향으로 그래프의 모양을 관찰하게 한다.

⑸ 방정식과 함수에서 완전제곱꼴로 고치는 방법의 차이점을 알게 하고, 특히 함수에서 완전제곱꼴로 고칠 때는 이차항의 계수로 일차항까지 묶고 괄호 안에서 완전제곱이 되는 상수를 더하고 뺀 다음 정리한다.
또 값을 대입하여 거듭제곱을 계산할 때에는 괄호를 치게 하고, 지수를 가장 먼저 계산할 수 있게 한다.

둘 째 중 수준 학생들에 대한 개선책

(1) 모든 이차함수는 표준형인 $y = a(x - p)^2 + q$ 꼴로 만들어 p 값 또는 q 값이 0일 때 $y = ax^2$, $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$ 이 됨을 설명하고 이해할 수 있게 한다.

(2) 모든 이차함수 즉 포물선은 이차항의 계수와 꼭지점을 알 때 구하여지며, 그것으로 구성됨을 알게 한다.

(3) 컴퓨터를 이용하여 이차함수의 그래프를 그려봄으로써 이차항의 계수와 대칭축, 꼭지점에 대한 성질을 알게 한다.

(4) x 값이 증가할 때, y 값의 변화는 왼쪽에서 오른쪽방향으로 그래프의 모양을 관찰하게 한다.

(5) 방정식과 함수에서 완전제곱꼴로 고치는 방법의 차이점을 알게 하고, 특히 함수에서 완전제곱꼴로 고칠 때는 이차항의 계수로 일차항까지 묶고 괄호 안에서 완전제곱이 되는 상수를 더하고 뺀 다음 정리한다.
값을 대입하여 거듭제곱을 계산할 때에는 괄호를 치게 하고, 지수를 가장 먼저 계산할 수 있게 한다.

세 째 하 수준 학생들에 대한 개선책

(1) 대응표를 작성하고 컴퓨터 또는 모눈종이를 활용하여 이차함수의 그래프의 유형별로 그려 보이고 연습을 시킨다.

(2) 컴퓨터를 이용하여 이차함수의 그래프는 포물선임을 알게 하고, 포물선의 대칭축은 y 축과 평행인 직선이며, 모눈종이 위에 그려 축을 중심으로 접어서 겹쳐짐을 보여 축에 대하여 좌·우 대칭임을 알게 한다.

(3) 모든 이차함수 즉 포물선은 이차항의 계수와 꼭지점을 알 때 구하여지며, 그것으로 구성됨을 알게 한다.

(4) x 값이 증가할 때, y 값의 변화는 왼쪽에서 오른쪽방향으로 그래프의

모양을 관찰하게 한다.

(5) 방정식과 함수에서 완전제곱꼴로 고치는 방법의 차이점을 알게 하고, 특히 함수에서 완전제곱꼴로 고칠 때는 이차항의 계수로 일차항까지 묶고 괄호 안에서 완전제곱이 되는 상수를 더하고 뺀 다음 정리한다.
값을 대입하여 거듭제곱을 계산할 때에는 괄호를 치게 하고, 지수를 가장 먼저 계산할 수 있게 한다.

Ⅴ.결론 및 제언

A. 결론

본 연구의 주요목적은 중학교 3학년 학생들의 이차함수의 그래프에 있어서 오류 유형을 조사하여 그 원인을 분석하고 개선책을 제시하는 것이다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 두 가지 문제를 설정하였다. 첫 째 학습능력(상, 중, 하)에 따른 중학교 3학년 학생들의 이차함수의 그래프 영역에서 발생하는 오류유형을 분석한다. 둘 째 각각의 오류 유형에 대한 오류의 원인을 분석하여 그 개선책을 제시한다.

본 연구를 수행하기 위해서 김천시에 소재하는 두 개 중학교를 선정하였으며, 오류유형 검사를 위하여 1학기말 수학성적을 기초로 상, 중, 하로 구분하여 총 252명을 연구대상으로 선정하였다. 오류유형 검사지는 중학교 3학년 5종 교과서에서 공통으로 다루어지는 교과서 수준의 난이도로서 만들었다. 검사지는 이차함수의 그래프의 유형별로 4문제씩 총 20문항으로 구성되었으며, 학생들이 제시한 문제 풀이 과정을 통해서 이차함수의 그래프에 대한 오류 유형과 원인을 분석하였다.

오류 모델은 네 가지 모델(문제의 자료를 잘못 사용하는 오류, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 기술적인 오류)으로 분류하였으며, 이차함수의 그래프 유형과 학생들의 학습 능력(상, 중, 하)별로 정답율과 오류를 백분율로 나타내었다.

전체 252명에게 그래프 유형별로 총 20문항을 제시한 결과 완전한 답을 한 학생은 45.9%, 무응답 또는 끝까지 못 풀고 답만 제시한 학생이 29.5%이며 오류 분석대상은 24.5%이다.

이와 같은 분석 결과로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 이차함수의 그래프에 관한 문제 풀이과정에서 나타난 오류는 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류(37.0%)가 가장 많았고, 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류(31.1%), 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류(21.7%), 기술적인 오류(10.2%)의 순으로 나타났다.

둘째, 상 수준의 학생들은 축의 방정식을 이용한 그래프의 대칭성을 활용하지 못하는 경우가 많으며, 모든 이차함수의 그래프는 이차항의 계수가 같을 때 그래프의 모양이 같다 즉, ‘ 평행이동 된 것이다 ’ 라는 성질을 잘 이용하지 못하는 경우가 많았다.

셋째, 중 수준의 학생들은 이차함수의 표준형인 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼭지점 (p, q) 를 구하는 문제에 익숙한 나머지 $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$ 형태의 식에서는 $p = 0$ 또는 $q = 0$ 인 경우임을 알지 못하고, $y = a(x - p)^2 + q$ 와 $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$ 꼴을 별개의 것으로 생각하고 억지로 p, q 값을 구하려고 하는 경우가 많았다. 또한 축의 방정식 $x = p$ 에서 대칭성과 그 p 가 꼭지점의 x 좌표가 된다는 사실을 잘 모르는 경우가 많다.

넷째, 하 수준의 학생들은 좌표평면상의 그래프를 이해하거나 좌표를 읽는 능력이 부족하며 좌표의 값을 식에 대입하거나 완전제곱식으로 바꿀 때 괄호처리와 계산상의 오류가 많다.

B. 제언

학생들의 사고과정을 이해하고 그들의 지식 체계에 효과적인 교수법을 연구하려는 연구자들을 위해 본 연구에서 얻은 결과를 기초로 다음과 같은 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 그래프를 해석하거나 식이나 기호를 그래프화하는 능력의 부족으로 인한 오류가 많았다. 따라서 함수의 그래프를 지도할 때는 대수식과 관련 짓고 대수식의 관점에서 정보(자료) 추출 해내며, 대수식을 지도할 때는 그래프적 관점에서 바라볼 수 있도록 두 가지 표상을 복합적으로 지도하는 것이 바람직하다.

둘째, 모든 이차함수의 그래프는 포물선이며 이차항의 계수가 그래프의 모양을 결정하므로 이차함수의 그래프에 대한 지도는 이차항의 계수의 성질과 꼭지점을 중심으로 지도하고, 해석할 수 있도록 하는 것이 바람직하다.

셋째, 함수의 그래프를 시각화해서 지도할 수 있는 교실 환경과 현장 교사들이 손쉽게 사용할 수 있는 멀티미디어 자료의 개발과 활용이 필요하다.

Ⅵ. 참 고 문 헌

구광조, 오병승, 류희찬(공역)(1992). *수학교육과정과 평가의 새로운 방향*. 경문사.

구광조 외 1인(1994). *중학교 3학년 수학 교사용 지도서*. 지학사.

김도상, 석용등, 신현성, 이준열(공저)(1994). *수학과 교재론*. 경문사.

김옥경(1990). *고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구*. 이화여자대학교 석사학위 논문.

김연식 외 1인(1994). *중학교 3학년 수학 교사용지도서*. 두산동아.

김응태 외 3인(1994). *중학교 3학년 수학 교사용 지도서*. 한샘출판사.

김택현(1999). *패턴 활동으로 구성된 함수 단원 개발과 적용*. 한국교원대학교 석사학위논문.

류한영(1999). *중학교 3학년과 고등학교 1학년들의 방정식에 대한 오류분석에 관한 연구*. 한국교원대학교 석사학위 논문.

류희찬(1994). *수학 문제 해결 평가의 의미와 방법*. 청람수학교육, 제4집, p.143 146

박교식(1992). *함수개념 지도의 교수현상학적 접근*. 서울대학교 박사학위논문.

박배훈 외 1인(1994). *중학교 3학년 수학 교사용 지도서*. 교학사.

신인숙(1996). *중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구*. 한국교원대학교 석사학위논문.

심규선(1997). *교육용 프로그래밍 언어 MAL을 이용한 함수개념 지도*. 서울대학교 석사학위논문.

오덕환(1992). *함수 개념 지도의 새로운 접근 방법*. 한국 교원대학교 석사학위논문.

오정현(1996). *중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구*. 이화여자대학교 석사학위논문.

우정호(1998). *학교수학의 교육적 기초*. 서울대학교 출판부.

이영란(1998). *이차함수 그래프의 구성주의적 접근*. 서울대학교 석사학위 논문.

이희승(1981). *국어대사전*. 민중서림.

정영옥(1997). *Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구*. 서울대학교 박사학위 논문.

조한숙(1991). *함수개념 형성에 관한 연구*, 서울대학교 석사학위논문.

한종희(1997). *고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구*. 한국교원대학교 석사학위논문.

Kline, M(1972)., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Time*. New York: Oxford University Press.

NCTM(1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA:NCTM.

Babbit, B. C.(1990). *Error pattern in problem solving*. Paper presented at the International Conference of the Council for Learning Disabilities. ED 338 500. pp. 1-11.

Janvier, C., Girardon, C. & Morand J-C.(1993). Mathematical symbols and repesentations. In P.S.Wilson(Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*(pp. 79-94). N.Y.: NCTM.

Movshovitz-Hadar, Orit, Z. & Shlomo, I.(1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol.18, No.1. pp. 3-14

Radatz, H.(1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 10. pp. 163-172.

Abstract

A Study on the Analysis of Errors on the Graph of Quadratic Function

- on the basis of the function unit of the third year middle school -

Sung, Jong Gi

Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Korea National University of Education
Chung-Buk, Korea

Supervised by Professor Kim, Won Kyung Ph. D.

The main purpose of this study is to research the types of errors on the graphs of quadratic function in mathematics textbook of the third year middle school students, and to analyze the reasons of those errors, then to show possible answers.

For this purpose, two questions were set as follows;

(1) To analyze the types of errors according to the learners' capability divided three groups such as high, middle, and low achievers in solving the quadratic function of the middle school mathematics textbook.

(2) To analyze the reasons of those errors and to suggest the better solutions.

For performing this research, 252 students of two middle schools in Kimchon were selected as subjects. And they were divided into three groups such as high, middle, and low group on the basis of their mathematics grades at the final examination of the first semester in 1999. The research paper for error types was

designed by considering the degree of difficulty of 5 textbooks used in the middle school. It consisted of 5 types of quadratic function graphs, and each type has 4 questions. After the students were tested those questions, the types and reasons of errors were analyzed in detail on their answer sheets.

Error models fall into four divisions- the fallacy of not using given materials, that of not interpreting question correctly, that of not using properly definitions or principles, and that of technical skill. The rate of the correct answers and the errors on each type of quadratic function were shown as percentage

The results of this research are as follows :

First, the rates of fallacies that happened in the process of solving the quadratic function graph are shown as follows; the fallacy of not using definitions or principle properly took the highest 37 percentage, and that of interpreting improperly took 31.1 percentage. The fallacy of not using the given information properly took 21.7 percentage. At last, that of technical skill took 10.2 percentage.

Second, it was shown that students generally made mistakes most frequently in the case of how to use definition or theorem properly and how to interpret questions correctly. The errors which came from the lack of technical skill also happened frequently.

Third, the students who had low grades showed the tendency not being able to solve the next level because of their poor reasoning ability.

Fourth, it is desirable to use 'algebra' and 'function' together though we explain one of them. For example, it is also so useful to explain the graph of function by using algebra or using both of them together, because many students had the lack of capability to interpret a graph, signal, and equation. In the case of explaining algebra, it is also very useful to teach students by using a graph to make them understood algebra from the graphic view.

Fifth, when we teach students about the graph of quadratic function it is also desirable to explain and interpret it focusing an apex.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education Korea National University of Education in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Master of Education in February, 2000

< 오류 분석 검사지 >

※ 본 검사지는 이차함수에 대한 오류를 분석하기 위한 검사지 입니다. 조사 결과는 학교 성적과 무관합니다. 조사 자료는 공개하지 않으며, 연구 목적 이외에는 사용하지 않습니다.

수학교육을 위해 여러분의 협조가 필요합니다. 문제를 잘 읽고 최선을 다해 풀어 주시기 바랍니다.

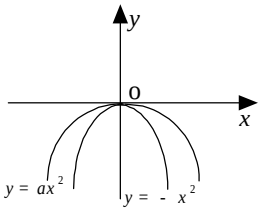
풀이와 답은 직접 문제지에 적어 넣기 바랍니다.

1. **다음 함수에서 그래프의 폭이 가장 큰 것은** ?

① $y = -2x^2$ ② $y = 3x^2$ ③ $y = -\frac{1}{3}x^2$ ④ $y = \frac{1}{2}x^2$ ⑤ $y = -\frac{2}{3}x^2$

(**이 유**) **간단히 쓰시오**

2. **오른쪽 그림과 같이 포물선** $y = ax^2$ **은** x **축과** $y = -x^2$ **사이에 존재할 때, 다음물음에 답하시오.**



(1) a **값의 부호는** ?

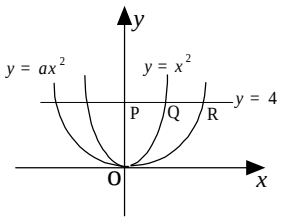
(2) a **값의 범위를 구하시오.**

(**풀 이**)

3. **오른쪽 그림은**

$y = x^2$, $y = ax^2$ **과** $y = 4$ **의**

그래프를 그려놓은 것이다. $\overline{PQ} = \overline{QR}$ **일 때,**



(1) **두 점** P, Q **의 좌표를 구하면** ?

(**풀 이**)

(2) a **의 값을 구하시오.**

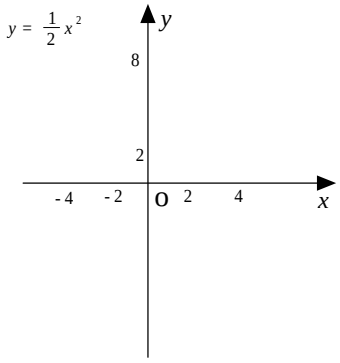
(**풀 이**)

4. **다음 좌표평면 위에는** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프가 그려져 있다.**

다음 물음에 답하시오.

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를** x **축에 대하여 대칭이동 시킨 함수의 식을 쓰시오.**

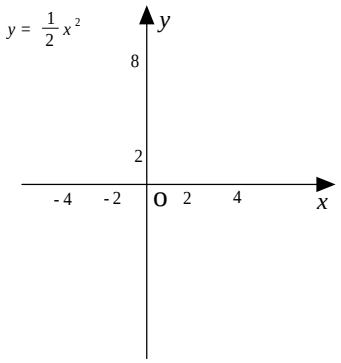
(2) **아래 좌표평면 위에 대칭이동 시킨 함수의 그래프를 그리시오.**



5. **이차함수** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 이용하여 이차함수** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ **의 그래프를 그릴 때, 다음 물음에 답하시오.**

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ **의 그래프는** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 (** ㉠ **)축으로 (** ㉡ **)만큼 평행이동한 것이다. ㉠, ㉡은 ?**

(2) **아래 좌표평면에** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ **의 그래프를 그리시오.**



6. **이차함수** $y = -2x^2 + q$ **의 그래프가** $(2, -1)$**를 지날 때, 다음 물음에 답하시오.**

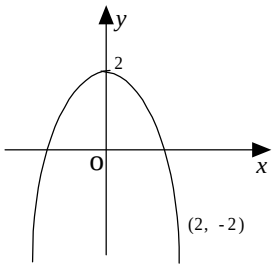
(1) q **값을 구하시오.**

(풀 이)

(2) **이차함수** $y = -2x^2 + q$ **의 그래프 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구하 시오.**

(풀 이)

7. **오른쪽 포물선을 나타내는 이차함수를 구할 때, 다음 물음에 답하시오.**



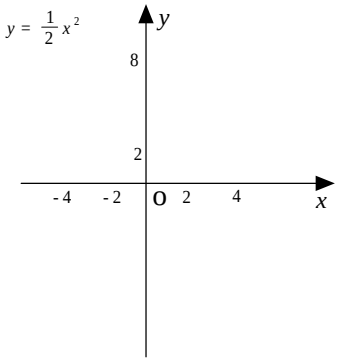
(1) **구하고자 하는 포물선의 꼭지점 좌표는** ?

(2) **포물선의 식을 구하시오.**
(**풀 이**)

8. **이차함수** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 이용하여 이차함수** $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ **의 그래프를 그릴 때, 다음 물음에 답하시오.**

(1) $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ **의 그래프는** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 (** ㉠ **)축으로 (** ㉡ **)만큼 평행이동한 것이다.** ㉠, ㉡**은** ?

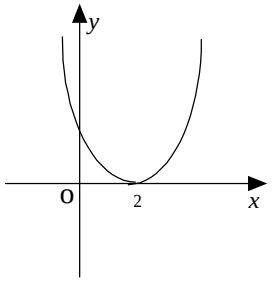
(2) **오른쪽 좌표평면에** $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ **의 그래프를 그리시오.**



9. 이차함수 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = -2$ 일 때, 꼭지점의 좌표를 구하시오.

(풀 이)

10. 오른쪽 그림은 $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동한 그래프 이다.
이 포물선의 식을 구하려고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

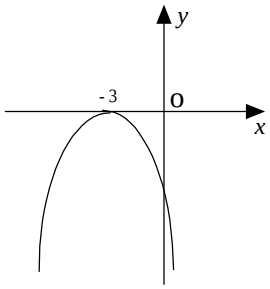


(1) 구하고자 하는 포물선은 $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동 하였는가 ?

(2) 평행이동된 포물선의 식을 구하시오.

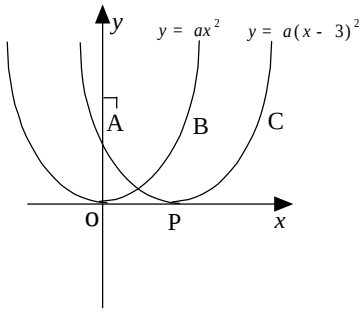
(풀 이)

11. 오른쪽 그림은 이차함수의 그래프이다.
x 값이 증가할 때, y 값이 감소하는 x 값의 범위를 구하시오.



(이 유) 아는 데로 간단히 쓰시오.

12. **오른쪽 그림은 이차함수** $y = ax^2$ **과** $y = a(x - 3)^2$ **의 그래프 를 나타낸 것이다. 선분 AB와 선분 AC의 차이를 구하시오.**

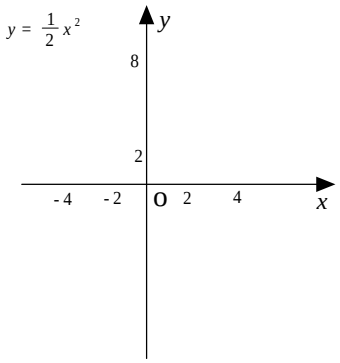


(풀 이)

13. **이차함수** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 이용하여 이차함수** $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ **의 그래프를 그릴 때, 다음 물음에 답하시오.**

(1) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ **의 그래프는** $y = \frac{1}{2}x^2$ **의 그래프를 (㉠) 축으로 (㉡)만큼, (㉢)축으로 (㉣)만큼 각각 평행이동한 그래프이다. ㉠, ㉡, ㉢, ㉣은 ?**

(2) **오른쪽 좌표평면에** $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ **의 그래프를 그리시오.**



14. **이차함수** $y = 2x^2 - 8x + 3$ **의 그래프에서 축의 방정식과 꼭지점의 좌표를 구하시오.**

(풀 이)

15. **다음과 같은 세 이차함수**

$y = 2x^2 \cdots ①$, $y = 2x^2 - 4 \cdots ②$, $y = 2(x - 3)^2 \cdots ③$ **에서**

①, ②, ③의 그래프에 대해 다음의 물음에 대한 공통점과 차이점을 1가지 이상 쓰시오.

(1) **이차함수 ①과 ②에서**

· **공통점** :

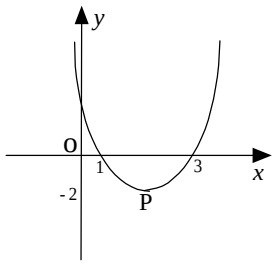
· **차이점** :

(2) **이차함수 ②와 ③에서**

· **공통점** :

· **차이점** :

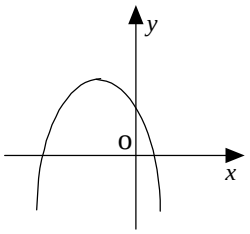
16. **오른쪽 포물선을 나타내는 이차함수를 구할 때, 다음 물음에 답하시오.**
(**단, 점 P는 꼭지점**)



(1) **위 포물선의 축의방정식과 꼭지점의 좌표는** ?

(2) **위 포물선의 식을 구하시오.**
(**풀 이**)

17. **이차함수** $y = a(x - p)^2 + q$ **의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,** a, p, q **의 부호를 구하시오.**



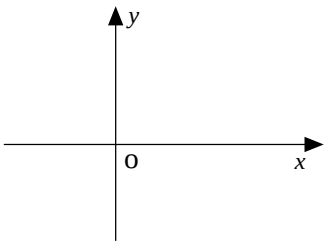
(**풀 이**)

18. **이차함수** $y = -2x^2$ **의 그래프를** x **축으로** p, y **축으로** q **만큼 평행이동 시킨 함수는** $y = -2x^2 - 8x - 5$ **일 때,** p, q **의 값을 구하시오.**

(**풀 이**)

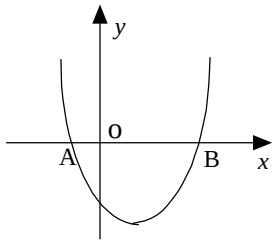
19. **다음 물음에 답하시오.**

(1) **아래 좌표평면에 이차함수** $y = -3x^2 + 6x - 1$ **의 그래프를 그리시오.**



(2) $y = -3x^2 + 6x - 1$ **의 그래프에서** x **값이 증가할 때,** y **값도 증가하는** x **값의 범위를 구하시오.**

20. **오른쪽 그림의 포물선**
$y = x^2 - 4x + k$ **에서**
$\overline{AB} = 6$ **일 때,**
k**의 값을 구하시오.**



(**풀 이**)